

Solution du paradoxe de l'interrogation surprise

par une analyse strictement logique du texte original

Norbert Codréanu

Ingénieur E.N.S.E.M.

Docteur d'État-ès-Sciences (dénommé à présent H.D.R.)

Retraité

Abstract. This article proposes a solution to the “paradox of surprise interrogation,” a problem that was published by D.O'Connor in 1948, and which has not found a logical explanation for more than 75 years. A large number of studies have focused on the “surprise” effect, although this term does not appear in the above-mentioned publication. As far as we are concerned, in this article we will try to solve, in a purely logical way, the problem posed in the original text. Then in a second part, we will highlight the most common errors that appear in the usual demonstrations concluding a paradox. In addition to purely logical errors, these are very often mistakes made in the reasoning in «common language» due to implicit or implied assumptions.

Keywords : paradox, paradox of examination-surprise, philosophical paradox, mathematical logic, paradox of interrogation-surprise, reasoning by the absurd.

Résumé. Cet article propose une solution au « paradoxe de l'interrogation surprise », problème qui a été publié par D.O'Connor en 1948, et qui n'a pas trouvé d'explication logique depuis plus de 75 ans. Un grand nombre d'études ont eu pour sujet « l'effet de surprise » alors que ce terme n'apparaît pas dans la publication précitée. Pour ce qui nous concerne, nous chercherons, dans cet article, à résoudre, de façon purement logique, le problème posé dans le texte original. Puis dans une seconde partie, nous mettrons en évidence les erreurs, les plus courantes, qui apparaissent dans les démonstrations habituelles concluant à un paradoxe. En plus des erreurs purement logiques, il s'agit très souvent de fautes commises dans les raisonnements en « langage courant » dues à des hypothèses implicites ou sous-entendues.

Mots-clés : paradoxe, paradoxe de l'examen-surprise, paradoxe philosophique, logique mathématique, paradoxe de l'interrogation-surprise, raisonnement par l'absurde.

Table des matières

Solution du paradoxe de l'interrogation surprise.....	1
A – Énoncé du « paradoxe » et raisonnements habituels.....	3
A.1 Énoncé du « paradoxe ».....	3
A.2 Raisonnements habituels.....	3
B – Remarque sur « l'effet de surprise ».....	3
C – Premier raisonnement.....	4
C.1 Raisonnement des scientifiques.....	4
C.2 Mathématique.....	4
C.3 Formalisation.....	4
C.4 Première conclusion correcte.....	4
D – Second raisonnement.....	5
D.1 – Principe de cette démonstration.....	5
D.2 – Analyse logique « statique ».....	5
D.3 – Analyse logique « dynamique-chronologique ».....	6
E – Conclusion.....	7
F – Compléments : les principales erreurs des raisonnements habituels.....	7
F.1 - Le raisonnement « rétrograde ».....	7
F.2 - Le raisonnement sur le nombre de jours de la semaine.....	7
F.3 - Le raisonnement par « récurrence ».....	8
G – Annexes.....	8
G.1 - Table de vérité de l'implication [$A \Rightarrow B$ ou « SI A ALORS B »].....	8
G.2 - Une démonstration du « raisonnement par l'absurde ».....	9
G.3 - Texte original de D. O'Connor.....	9
H – Références bibliographiques.....	10

A – Énoncé du « paradoxe » et raisonnements habituels

A.1 Énoncé du « paradoxe »

Nous reproduisons ci-dessous l'énoncé le plus utilisé.

Monsieur Martin, professeur de mathématique, annonce à ses élèves qu'il fera une interrogation surprise la semaine suivante. Et il précise :

(a) qu'une, et une seule, interrogation aura lieu durant un des cours dans la semaine (du lundi au samedi).

(b) que juste avant le début de l'interrogation, les élèves ne pourront pas avoir une certitude logique que l'interrogation aura lieu le jour même.

A.2 Raisonnements habituels

Jacques, le meilleur élève en mathématiques de la classe, raisonne alors ainsi :

Nous avons cours avec Monsieur Martin le vendredi et le samedi. Puisqu'il nous dit que nous ne pourrions pas connaître le jour de l'interrogation, celle-ci ne se déroulera pas le samedi, car samedi matin, sachant que l'interrogation se fera dans la semaine (affirmation a), elle ne pourrait avoir lieu que le samedi et donc nous saurions, à l'avance, de manière certaine qu'elle va avoir lieu. Il est donc acquis que l'interrogation n'aura pas lieu le samedi.

Mais alors, le vendredi, elle ne peut pas avoir lieu non plus, car sachant qu'elle ne peut pas avoir lieu le samedi, quand nous arriverons dans la classe le vendredi, nous saurons qu'elle va avoir lieu. Il est donc acquis aussi que l'interrogation n'aura pas lieu le vendredi. (Charpentier A., 2009)

En poursuivant de la même manière, Jacques en déduit que l'interrogation ne peut avoir lieu ni le vendredi, ni le jeudi, ni le mercredi, ni le mardi, ni le lundi et donc qu'elle n'aura pas lieu.

Pourtant, le mercredi de la semaine suivante, Monsieur Martin fait son interrogation à la grande surprise de Jacques. Monsieur Martin n'a pas menti puisque (a) l'interrogation s'est bien déroulée dans la semaine prévue comme il l'avait annoncé, et que (b) Jacques a été surpris le jour de l'interrogation. Le raisonnement de Jacques semble pourtant parfaitement rigoureux. (Delahaye JP., 2014)

Donc ce que dit Monsieur Martin est contradictoire : il affirme une chose et son contraire à la fois.

Que peut-on déduire des propos de quelqu'un qui se contredit lui-même ? Tout et n'importe quoi. Il n'y a pas de paradoxe, seulement un drôle de professeur qui tient des propos incohérents – contradictoires – auquel on ne peut donc pas se fier. Il n'a aucune raison d'être fier de nous surprendre puisque quiconque se contredit surprend forcément ceux qui croient à la vérité de ses propos.» (Delahaye JP., 2021)

B – Remarque sur « l'effet de surprise »

Un nombre phénoménal d'articles (dont seulement quelques références bibliographiques sont données ci-dessous) ont été publiés pour faire l'exégèse du terme « surprise » alors que ce mot n'apparaît pas dans l'énoncé original de O'Connor, D., (1948). Dans son article il n'est pas question de « surprise », mais, textuellement, « d'un exercice dont les participants ne peuvent savoir, avant la veille au soir, quand il se produira ». (voir G.3)

Pour alléger l'écriture, dans notre article, nous ne continuerons à utiliser le terme « SURPRISE » que, comme étant tout simplement, une abréviation de : « les participants ne peuvent pas savoir, juste avant l'interrogation, que l'évènement se produira le jour même ».

Cette définition fait appel à la chronologie des évènements. Elle signifie, en particulier, que les élèves ne peuvent pas savoir le jour J, ce qui se passera le lendemain, le jour J+1.

[Il s'agit, tout simplement, d'une hypothèse bien banale, qui est vérifiée dans la vie de tous les jours].

Par conséquent, les raisonnements rétrogrades (par récurrence ou non) sont invalides (pour le problème qui nous intéresse, tel qu'il est énoncé par D. O'Connor). Si le vendredi les élèves savent déjà, à l'avance, ce qui se passera le lendemain ; par définition, la « surprise » n'existe plus et l'énoncé du problème n'a plus aucun intérêt.

Dans cet article nous ne nous intéressons donc qu'au texte original de D. O'Connor (qui n'emploie pas le terme ambigu de « surprise »).

C – Premier raisonnement

C.1 Raisonnement des scientifiques

Les scientifiques (mathématiciens, physiciens et tous les autres scientifiques, ainsi que de nombreuses personnes) travaillent de la façon suivante. Dans un premier temps ils bâtissent une hypothèse, puis ils en analysent toutes les conséquences. Et enfin ils terminent leur travail ainsi : si toutes les conséquences sont positives, logiques, vraies; l'hypothèse de départ était bonne donc cela fait avancer la science. Par contre, si l'une, au moins, des conséquences est fausse, illogique, absurde, paradoxale ; ils en concluent que l'hypothèse de départ était fausse, et ils ne diront jamais que c'est « le monde » ou le problème qui est paradoxal, absurde ou illogique.

C'est l'erreur que fait Jacques : à partir d'une conclusion paradoxale, il en déduit que le problème est un paradoxe, au lieu de conclure que c'est son hypothèse qui est fausse.

C.2 Mathématique

Les mathématiciens appellent cette démarche un raisonnement par l'absurde et l'utilisent couramment dans leurs démonstrations.

C.3 Formalisation

Dans une implication « SI **A** ALORS **B** » lorsque la conclusion « **B** » est fausse, erronée, paradoxale, cela signifie que l'hypothèse de départ « **A** », est, elle aussi, fausse.

[on trouvera en annexe G1 le détail des propriétés de l'implication]

Dans notre cas, «**A**» = [le samedi matin, l'interrogation n'a pas déjà eu lieu]

et «**B**» = [le samedi, l'interrogation doit, à la fois, avoir lieu, d'après l'assertion (a) et ne pas avoir lieu d'après l'assertion (b)]

Jacques conclut donc que l'assertion « **B** » est stupide, paradoxale. Ce qui est exact, mais cela n'implique absolument pas que le problème soit un paradoxe. En réalité, il s'agit simplement d'un raisonnement par l'absurde l'explication logique correcte indique que lorsque « **B** » est faux, « **A** » aussi doit être faux.

C.4 Première conclusion correcte

La proposition « **A** » = [le samedi matin, l'interrogation n'a pas déjà eu lieu] étant fausse, son contraire est vrai, donc la conclusion logique est : [le samedi matin, l'interrogation a déjà eu lieu].

Le raisonnement correct démontre que l'interrogation ne peut pas avoir lieu le samedi, non pas parce que le problème est un paradoxe (comme le dit Jacques, sans le démontrer d'ailleurs), mais tout simplement parce qu'elle a déjà eu lieu avant le samedi. Et, étant donné qu'il ne peut y avoir qu'une et une seule interrogation dans la semaine, d'après l'assertion (a), il ne peut pas y avoir, une seconde interrogation, le samedi.

D – Second raisonnement

D.1 – Principe de cette démonstration

Pour simplifier le raisonnement, nous allons le découper, le scinder, en deux phases. Dans une première phase, nous étudierons l'aspect « statique » puis dans une seconde phase l'aspect « dynamique-chronologique ». L'aspect « statique » concerne la recherche des états logiques valides possibles, pour chacune des journées de la semaine (du lundi au samedi), et indépendamment les unes des autres. Puis l'aspect « dynamique-chronologique » nous conduira à balayer tous les jours de la semaine chronologiquement du lundi au samedi.

Habituellement, les élèves (ainsi que les professeurs d'ailleurs) considèrent que pour chacun des jours de la semaine, il n'y a que deux possibilités logiques :

- soit l'interrogation a lieu le jour même
- soit l'interrogation aura lieu plus tard

ERREUR !! s'écrit Mathilde, une excellente élève en mathématiques, ce raisonnement est faux, car incomplet. Pour être rigoureux, il faut ajouter une troisième possibilité, qui, dans les raisonnements habituels, est implicite, ou sous-entendue : « l'interrogation a déjà eu lieu ».

Par conséquent, une journée est caractérisée par les trois assertions suivantes :

- I. l'interrogation a déjà eu lieu
- II. l'interrogation a lieu le jour même
- III. l'interrogation aura lieu plus tard (un jour suivant)

D.2 – Analyse logique « statique »

La situation de chacun des jours de la semaine est la suivante :

Pour le lundi, l'assertion « I. » est fausse. Le lundi étant la première journée de la période, l'interrogation ne peut pas déjà avoir eu lieu (il n'y a pas de jour précédent). Les deux autres assertions étant valides, il s'en suit qu'il n'y a pas de certitude logique pour que l'interrogation ait lieu le lundi (et si elle a lieu c'est « une surprise »).

Pour les quatre jours suivants (mardi, mercredi, jeudi, vendredi), les trois assertions sont vraies. Ce qui fait trois possibilités, il n'y a donc pas de certitude logique, non plus, pour que l'interrogation ait lieu l'un de ces jours là (et si elle a lieu c'est une « surprise »).

Pour le samedi, l'assertion « III. » est fausse. Il s'agit de la dernière journée de la période, l'interrogation ne peut donc pas avoir lieu plus tard (il n'y a pas de « plus tard »).

L'assertion « II. », elle aussi, est fausse, car le samedi étant le dernier jour de la période, le samedi matin il ne reste plus qu'une seule journée, donc les élèves sauraient, à l'avance et de façon logiquement certaine, que l'interrogation aurait lieu le samedi, ce qui est contraire à la proposition (b) édictée par le professeur Martin.

Il ne reste donc qu'une seule alternative, l'assertion I : « le samedi matin, l'interrogation a déjà eu lieu ».

D.3 – Analyse logique « dynamique-chronologique »

Dans le monde réel, le temps s'écoule du lundi au samedi sans jamais revenir en arrière. Nous allons donc suivre cet écoulement du temps, en passant en revue, chronologiquement les jours de la semaine.

Le lundi il y a deux possibilités :

- l'interrogation a lieu le jour même : le problème est terminé : l'interrogation a eu lieu de façon inattendue, avec « surprise », car « *les participants n'ont pas pu savoir, avec une certitude logique, que l'interrogation aura lieu le lundi* ». Et pour tous les jours suivants, l'assertion I. devient vraie : « *l'interrogation a déjà eu lieu* » et comme l'interrogation ne peut avoir lieu qu'une seule fois, les assertions II et III deviennent fausses.
- l'interrogation n'a pas lieu le jour même on passe alors au jour suivant [le mardi]

Le mardi il y a trois possibilités :

- l'interrogation a eu lieu le lundi : le problème est déjà terminé (voir lundi)
- l'interrogation a lieu le jour même (le mardi) : le problème est terminé, l'interrogation a eu lieu de façon inattendue, avec « surprise », car « *les participants n'ont pas pu savoir, avec une certitude logique, que l'interrogation aura lieu le lundi* ». Puis pour tous les jours suivants, l'assertion I. devient vraie : « *l'interrogation a déjà eu lieu* » et comme l'interrogation ne peut avoir lieu qu'une seule fois dans la semaine d'après la proposition (a) du professeur Martin, les assertions II et III deviennent fausses.
- l'interrogation n'a pas lieu le jour même, on passe alors au jour suivant [le mercredi]

Le raisonnement est le même pour **le mercredi, le jeudi, et le vendredi**.

Le samedi, l'assertion « III. » est fausse. Il s'agit de la dernière journée de la période, l'interrogation ne peut donc pas avoir lieu plus tard (il n'y a pas de « plus tard »).

L'assertion « II. », elle aussi, est fausse, car le samedi étant le dernier jour de la période, le samedi matin il ne reste plus qu'une seule journée, donc les élèves sauraient, à l'avance et de façon logiquement certaine, que l'interrogation aurait lieu le samedi, ce qui est contraire à la proposition (b) édictée par le professeur Martin.

Il ne reste donc qu'une seule alternative, l'assertion I : « le samedi matin, l'interrogation a déjà eu lieu ».

Remarque : dans la réalité, nous n'arriverons jamais au samedi, car la conclusion logique de l'analyse du samedi, correspondant aux deux propositions données par le professeur Martin, est le samedi matin, l'interrogation a déjà eu lieu. Le professeur a donc déjà fait l'interrogation (avec surprise) le jour **J**, l'un des cinq premiers jours de la semaine. À partir de ce jour **J** le problème est terminé conformément à la proposition (a) donnée par le professeur : *il n'y aura qu'une seule interrogation dans la semaine*, elle a eu lieu le jour **J** (avec surprise) le problème est donc terminé.

E – Conclusion

On peut résumer les démonstrations qui viennent d'être faites en deux points :

- L'interrogation a forcément lieu l'un des cinq premiers jours de la semaine, car pour le samedi, la seule possibilité logique vraie est « *l'interrogation a déjà eu lieu* ».
- Pour chacun des cinq premiers jours de la semaine, il existe plusieurs possibilités, par conséquent il n'y a aucune certitude logique sur la réalisation de l'interrogation.

Il s'en suit que : « **l'interrogation a lieu l'un des 5 premiers jours de la semaine** ». Et, comme pour chacun de ces jours, il existe plusieurs alternatives : « **il est impossible de déterminer la date exacte de l'évènement** », dès lors, le jour où l'interrogation a lieu avec « surprise ».

Par conséquent, il n'y a aucun paradoxe dans ce problème et l'expérience confirme la démonstration qui vient d'être faite.

F – Compléments : les principales erreurs des raisonnements habituels

Dans ce paragraphe nous passons en revue quelques erreurs de raisonnement assez courantes, sans être exhaustifs, bien évidemment.

F.1 - Le raisonnement « rétrograde ».

Comme nous l'avons déjà indiqué, le raisonnement doit être chronologique. Car la définition, de ce que l'on nomme « la surprise » fait appel à la chronologie des événements. Elle signifie, en particulier, que les élèves ne peuvent pas savoir, le soir du jour « J », ce qui se passera le lendemain, le jour « J+1 », et les jours suivants.

[Il s'agit, tout simplement, d'une hypothèse bien banale, qui est vérifiée dans la vie de tous les jours].

Par conséquent, les raisonnements rétrogrades sont invalides (pour le problème qui nous intéresse, tel qu'il est énoncé par D. O'Connor). En effet, le vendredi, les élèves ne peuvent pas savoir, à l'avance, ce qui se passera le lendemain ; cela interdit donc tout type de raisonnement « remontant » le temps.

F.2 - Le raisonnement sur le nombre de jours de la semaine

Une des autres solutions proposées, habituellement, utilise une « récurrence » sur la durée de la période [le nombre de jours de « la semaine »].

« Pour comprendre le paradoxe, il faut simplifier l'histoire. Imaginons que les élèves de Monsieur Martin n'ont cours avec lui que le lundi et qu'il leur dise : « (a) je ferai une interrogation la semaine prochaine et (b) vous ne pourrez pas savoir quel jour elle se déroulera ; ce sera une surprise ». Jacques pourra alors raisonner ainsi : « Le lundi matin, je saurai que l'interrogation va avoir lieu aujourd'hui (car Monsieur Martin nous dit qu'il fera une interrogation cette « semaine » et que nous n'avons cours avec lui que le lundi) » et « qu'elle n'aura pas lieu aujourd'hui (car Monsieur Martin nous dit que nous serons surpris de l'interrogation or si elle a lieu le lundi nous ne serons pas surpris) ». Il y a contradiction entre les conclusions qu'on tire des affirmations de Monsieur Martin. Notons que, dans le cas d'une semaine complète, il y a aussi une telle contradiction : on déduit que l'interrogation aura lieu dans la semaine – Monsieur Martin l'affirme – et qu'elle n'aura pas lieu dans la semaine – raisonnement de Jacques. Donc ce que dit Monsieur Martin est contradictoire : il affirme une chose et son contraire à la fois. Dans le cas de la semaine complète de cours, cette contradiction est masquée, mais il y a bien une contradiction dans les affirmations de Monsieur Martin.

Que peut-on déduire des propos de quelqu'un qui se contredit lui-même ? Tout et n'importe quoi. Il n'y a pas de paradoxe, seulement un drôle de professeur qui tient des propos incohérents – contradictoires – auquel on ne peut donc pas se fier. Il n'a aucune raison d'être fier de nous surprendre puisque quiconque se contredit surprend forcément ceux qui croient à la vérité de ses propos.» (Delahaye JP, 2021)

Ce raisonnement par « récurrence » sur le nombre de jours n'est pas valide. Pour une période limitée à un seul jour, le jour en question n'a ni précédent ni suivant alors que ce n'est pas le cas pour les semaines « normales » de six jours. Il en est de même pour une période de deux jours. Pour qu'un raisonnement par récurrence soit valide, il faut que « les environnements » aient les mêmes caractéristiques. Pour une récurrence passant d'une période d'un seul jour à une période de deux jours, il faudrait que les deux jours aient les mêmes caractéristiques que le jour seul. C'est-à-dire qu'il faudrait, pour une semaine de deux jours, que le mardi ait les mêmes caractéristiques que le « lundi ». À savoir ne pas posséder de jour précédent, ce qui n'est pas le cas, donc la récurrence est invalide. Elle ne devient valide qu'à partir d'une période de trois jours.

Pour être plus complet, si l'on veut généraliser le problème à des périodes d'une durée quelconque :

- Périodes de un ou deux jours, le problème n'a pas de solution (le premier jour n'a pas de précédent et le second jour n'a pas de suivant).
- Périodes de trois jours et plus, il n'y a pas de paradoxes. Le raisonnement que nous avons fait précédemment (en D.2 et D.3) s'applique.

Par conséquent, il est possible de généraliser pour une période de n jours (avec n supérieur ou égal à trois) : l'interrogation a lieu, avec surprise, l'un des $n-1$ premiers jours de la période comme nous l'avons démontré précédemment.

F.3 - Le raisonnement par « récurrence »

« [le samedi, l'interrogation ne peut pas avoir lieu donc] ... En poursuivant de la même manière, Jacques en déduit que l'interrogation ne peut avoir lieu ni le vendredi, ni le jeudi, ni le mercredi, ni le mardi, ni le lundi et donc qu'elle n'aura pas lieu... » (JP Delahaye, 2014)

Le raisonnement chronologique, imposé par l'article original de O'Connor, comme nous l'avons vu précédemment, nous informe que le jour J l'on ne peut pas savoir ce qui se passera le jour $J+1$. Le raisonnement fait par Jacques, abusivement désigné par le nom de *récurrence*, ne tient pas compte de cela. En effet, pour démontrer ce qui se passe le vendredi, il s'appuie sur ce qui se passera le lendemain (le samedi) !! Donc ce raisonnement est invalide, car contraire à l'assertion (b) donnée par le professeur Martin.

G – Annexes

G.1 - Table de vérité de l'implication [$A \Rightarrow B$ ou « SI A ALORS B »]

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

[Dans la table de vérité, V signifie Vrai et F signifie Faux]

Dans le langage mathématique courant, la démarche que nous utilisons s'appelle «*raisonnement par l'absurde*».

Pour tester la validité d'une hypothèse, on analyse toutes ses conséquences. Si elles sont toutes fausses,

c'est que l'on s'est trompé, notre hypothèse de départ était fausse. C'est ce qui apparaît sur la dernière ligne de la table de vérité ci-contre.

Dans une implication valide (vrai) lorsque **B** est faux, la seule ligne possible, dans la table de vérité, est la dernière : **A** est obligatoirement faux.

Habitant CAEN, je peux témoigner du bon sens des arboriculteurs normands qui leur fait dire :

SI mon arbre est un Pommier ALORS [*cela implique que*] c'est un arbre Fruitier.

Et lorsque l'arbre de mon voisin n'est pas un arbre Fruitier : ce ne peut pas être un Pommier !

G.2 - Une démonstration du « raisonnement par l'absurde »

En théorie des ensembles, la démonstration est assez pédagogique.

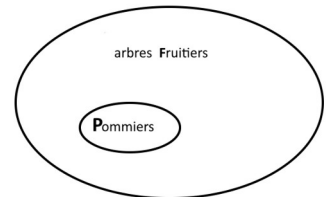
Soit F l'ensemble des arbres Fruitiers et P l'ensemble des Pommiers.

P est un sous-ensemble de F (P est contenu dans F) donc tout élément de P est aussi un élément de F, ce qu'illustre le schéma ci-contre.

En logique, l'implication suivante est donc valide :

SI « P est vrai » ALORS « F est vrai » c'est-à-dire

SI « mon arbre est un pommier » ALORS « c'est un arbre fruitier ».



Et en passant à la formule contraposée :

Tout ce qui n'appartient pas à F (c'est-à-dire ce qui est situé à l'extérieur de F)

ne peut pas, non plus, appartenir à P, car P est à l'intérieur de F (tout élément de P appartient à F).

En logique, on obtient :

SI « non-F est vrai » ALORS « non-P est vrai » c'est-à-dire

SI « mon arbre n'est pas un arbre Fruitier » ALORS « ce ne peut pas être un Pommier ».

G.3 - Texte original de D. O'Connor

Consider the following case. The military commander of a certain camp announces on a Saturday evening that during the following week there will be a "Class A blackout". The date and time of the exercise are not prescribed because a "Class A blackout" is defined in the announcement as an exercise which the participants cannot know is going to take place prior to 6.0 p.m. on the evening in which it occurs.

