Didactique. Le modèle en barres

Le modèle en barres est un outil de modélisation qui met en évidence les relations arithmétiques entre les données de l'énoncé et la grandeur « longueur ». Son élaboration par l'élève se déroule pendant la phase heuristique de recherche. Différents modèles sont possibles (1 barre, 2 barres) en fonction des situations. Le modèle double barre, utile dans les situations de comparaison ou d'équations, favorise des représentations mentales permettant de comprendre et de visualiser le sens du signe « = ». Il symétrise le statut des variables en jeu ; sa structure, analogue à la structure algébrique du problème, permet d'envisager des stratégies de calculs.

Modèle additif

Valeur totale	
Valeur 1	Valeur 2

Les rectangles doivent être remplis par les valeurs connues ou le mot « inconnu ». La longueur de la barre rectangle n'est pas forcément proportionnelle au nombre qu'elle contient. On représente le plus petit nombre par une barre plus courte (si on dispose de l'information).

Modèle multiplicatif

Cette représentation s'appuie sur la définition de la multiplication par un entier n, $nx = x + x + ... + x$ (n fois).

Valeur totale						
Valeur cherchée	Valeur cherchée	Valeur cherchée	Valeur cherchée	Valeur cherchée	Valeur cherchée	Valeur cherchée

Nombre (ici 7) de parts égales

Les rectangles sont remplis comme pour le modèle additif. Les parts sont égales : les rectangles sont de même longueur.

Problème 1. Se partager des macarons

Énoncé

a. Comment partager 48 macarons entre Simon et Mandy dans le ratio 5:11 ?
b. Ahmed, Simon et Mandy se partagent des macarons dans le ratio 4:3:2. Simon en a 9, combien en ont Ahmed et Mandy ?
c. Simon et Mandy ont réalisé un certain nombre de macarons dans le ratio 5:8. Sachant que Mandy, plus expérimentée, a fait 66 macarons de plus que Simon, combien Mandy en a préparé ?

Mots-clés

Ratios, proportionnalité, répartition, partage, unité, fractions, introduction de la notion de variable.

Pourquoi ce problème ?

Les problèmes de ratios sont des problèmes qui se prêtent à la mise en place du triptyque « manipuler, verbaliser, abstraire ». Ils sont l'occasion de mettre en vie des problèmes de partages (équitables ou non).

Ce problème montre l'intérêt de raisonner sur « une unité », notamment dans un contexte de comparaisons relatives de grandeurs commensurables, pour traiter de manière arithmétique des problèmes qui auraient nécessité l'introduction de plusieurs inconnues et un travail plus algébrique.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

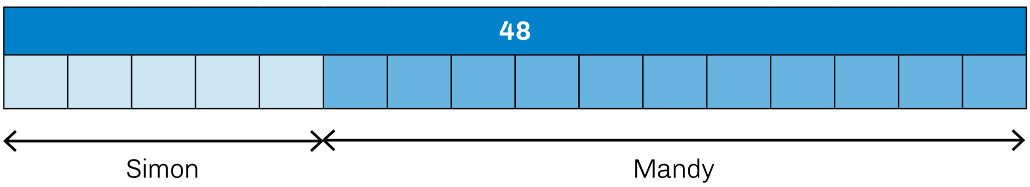
Même si les ratios ont un lien avec la proportionnalité, les proportions et les fractions, ils permettent de les aborder différemment et d'en construire le sens en les fréquentant dans différents contextes. Réciproquement, les notions de partages, proportions et fractions trouvent une contextualisation intéressante dans la présentation en ratios qui mobilisent des entiers.

Stratégies d’enseignement

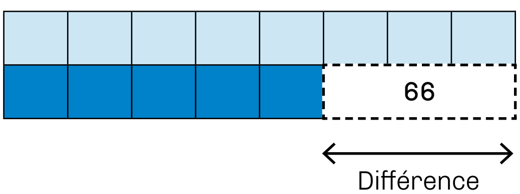
Les trois questions de cet énoncé peuvent être traitées de différentes façons : utilisation des fractions, pré-algèbre[61], etc.

Les cubes emboîtables, très présents dans le premier degré, sont un matériel pertinent pour travailler et permettre une modélisation de la situation qui met en relation deux grandeurs. L’utilisation de la modélisation dans les problèmes arithmétiques prépare l’introduction de la variable (brique, unité, inconnue) sans avoir recours à la mise en équation.

Une modélisation de la première question conduit au modèle multiplicatif dans le modèle en barres, c’est-à-dire partager 48 en 16 parts.



Dans la question c., la superposition des briques correspondant aux nombres de parts de chacun permet, par comparaison, d’exhiber la différence en tant que variable sur laquelle s’appuie le raisonnement. Le professeur pourra utilement guider les élèves dans la modélisation de cette différence.



66 macarons valent 3 « briques unité ».

61 — **Pré-algèbre** : ce terme désigne une étape intermédiaire (ou une écriture symbolique) entre l’arithmétique et l’algèbre (opérations à trous, exemples génériques, « 3 stylos + 2 cahiers = 8,5 euros »).

Didactique. Le rôle du matériel de manipulation

Le matériel de manipulation permet de comprendre les liens entre les données de l'énoncé et de mettre en évidence de quelle manière les élèves recherchent la « brique unité ». Il favorise le travail portant sur le passage du langage naturel au calcul.

Voici un problème de comparaison équivalent : « Un fils et son père ont leurs tailles dans le ratio 5:8. Sachant que le père mesure 66 cm de plus que son fils, quelle est la taille du père ? »

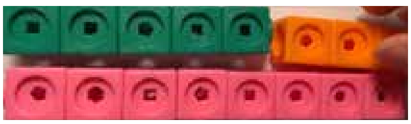


Figure 5. Utilisation d'un matériel de numération pour résoudre le problème.

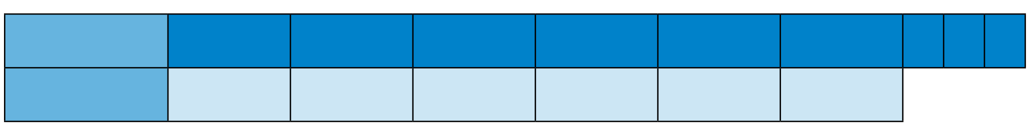
Voici le propos d'un élève de 6e en train de résoudre le problème : « Pour le père, on prend 8 blocs de "on ne sait pas encore combien" et pour le fils, 5 blocs. Sachant que 3 blocs mesurent 66 cm, en divisant par 3, un bloc mesure 22 cm. »

Pour aller plus loin

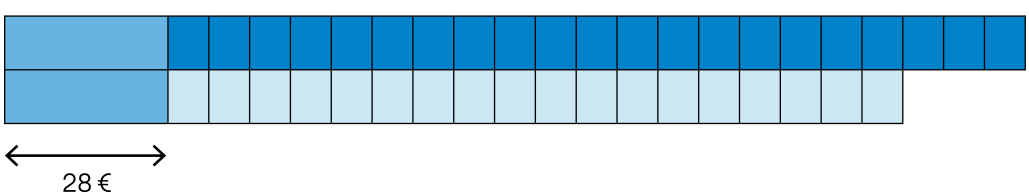
Pour l'énoncé suivant, il est nécessaire d'avoir acquis une certaine agilité du modèle en barres : « Abel et Sarah ont leurs économies dans le ratio 7:6. Ils reçoivent tous deux 28 € et ont maintenant leurs économies dans le ratio 25:22. Quelles étaient leurs économies au départ ? » La brique de base va évoluer lors de la résolution.

Au départ, l'écart est de 1 « brique unité » car le ratio est 7:6, ce qui amène à la modélisation suivante :

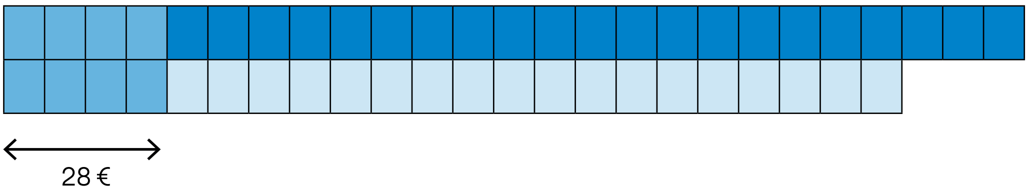
Après l'ajout de 28 €, les économies d'Abel et Sarah sont dans le ratio 25:22. L'écart est cependant conservé en termes de valeurs et il est maintenant de 3 « briques unité », car 25 – 22 = 3, ce qui indique qu'il faut partager la précédente « brique unité » en 3.



Le ratio 7:6 devient le ratio 21:18, qui lui est équivalent.



Pour arriver au ratio 25:22, il faut que la partie ajoutée corresponde donc à 4 « briques unité » (21 + 4 = 25 et 18 + 4 = 22).



On en déduit que la « brique unité » vaut 7 €, ce qui permet de répondre au problème posé.

Problème 2. Les angles du triangle sont dans un ratio

Énoncé

a. Dans quel ratio sont les trois angles d'un triangle équilatéral ?
b. Quelle est la nature d'un triangle dont les angles sont dans le ratio 1:2:3 ?
c. Existe-t-il un triangle isocèle dont les angles sont dans le ratio 2:2:7 ?

Mots-clés

Ratio, proportion, recherche de la « brique unité », somme des angles d'un triangle.

Pourquoi ce problème

En dépit du contexte, ce problème n'est pas un problème de géométrie. Il permet d'aborder la notion de ratio avec 3 nombres dans un contexte géométrique. Il nécessite un changement de cadre : en effet, l'énoncé amène l'élève à sortir de l'arithmétique pour interroger les connaissances de géométrie : la somme des angles d'un triangle et les relations entre la mesure des angles et la nature des triangles.

La question a. a pour objectif l'entrée dans le problème par l'élève. La question est élémentaire et réactive les propriétés angulaires du triangle équilatéral. Les questions b. et c., progressives, ont pour enjeu de faire réfléchir l'élève par un questionnement plus ouvert sur la compréhension des ratios proposés tout en mobilisant ses connaissances sur les triangles particuliers.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

En 5e, ce problème constitue un premier pas vers la géométrie déductive. Il prend appui sur une propriété démontrée (la somme des angles d'un triangle) et sur les connaissances des triangles particuliers. La justification des résultats aux différentes questions contribue à entrer dans la notion de preuve en mathématiques. En classes de 4e et 3e, l'enjeu de cet exercice est de consolider les connaissances des élèves sur les triangles particuliers en lien avec la manipulation de ratios.

Stratégies d'enseignement

Ce problème peut être posé en question flash, puisqu'il réactive une connaissance de base (la somme des angles d'un triangle).

Les tentatives de dessins, à main levée, par les élèves sont naturelles et doivent être encouragées. Cependant, elles ne constituent pas toujours une aide efficace ou pertinente ; les essais/ajustements sur les angles peuvent aboutir rapidement (question b.) ou être infructueux selon les ratios (question c.).

Pour les élèves en début de 5e : pour la question b. (idem pour la question c.), lorsque les élèves ont été familiarisés, notamment dans les classes primaires, à l'utilisation du matériel de manipulation tel que les cubes emboîtables et les réglettes © Cuisenaire, ils visualisent la répartition et en déduiront la valeur de l'unité en invoquant la valeur du tout.

Figure 6. La somme des angles est composée de 6 parts, donc 6 parts = 180°.

Dans le cadre de la différenciation pédagogique, on peut adapter les ratios dans la question c. (par exemple 1:1:4 ou 2:2:6).

La pratique courante, dans le monde anglo-saxon, d'une recherche d'une affirmation fausse dans les QCM mérite d'être développée.

Par exemple : « The angles of a triangle are in the ratio 1:1:2.
Which of the following sentence(s) is (are) false?
a. It is a right-angled triangle.
b. It is an isosceles triangle.
c. It is a scalene triangle.
d. It is an equilateral triangle. »

TRANSFERT[62]

« Comment partager un segment de 50 cm dans le ratio de 1:3:4 ? »

62 — Voir l'introduction et le chapitre 7.

Problème 3. Des fractions et des proportions

Énoncés

1. La collecte : 20 € ont été collectés par 3 élèves lors de la vente de gâteaux. Jim en a collecté le quart, Paul 3 huitièmes et Jane le reste. Sachant qu'une part de gâteau coûtait 50 centimes, combien de parts de gâteaux ont-ils vendues chacun ?
2. Football : Pour se maintenir dans son groupe, une équipe ne peut pas perdre plus de 20 % de tous les matchs joués. À ce jour, une équipe de football a gagné 8 matchs, concédé 8 matchs nuls et perdu 10 matchs. Cette équipe ne pourra alors se maintenir dans son groupe que si elle ne perd plus aucun match jusqu'à la fin de la saison. Combien lui reste-t-il de matchs à jouer au minimum ?
3. Économies : Je dépense 4 septièmes de mes économies pour acheter un manteau et le tiers du reste pour une paire de chaussettes. J'ai maintenant 9,52 €. Combien avais-je d'économies au départ ?
4. Devinette : Je pense à un nombre, je le double, j'ajoute 2 septièmes du nombre de départ et j'obtiens 376. Quel était le nombre de départ ?
5. Le Grand Duc : Le Grand Duc de York a conduit ses hommes au sommet de la montagne. À 14 heures, ils avaient parcouru 1 tiers du chemin. À 14 h 50, ils en avaient parcouru 75 %. À quelle heure ont-ils commencé leur marche ?

Mots-clés

Modélisation en barres, fractions, proportions, pourcentages, date et durée.

Pourquoi ces problèmes ?

Plusieurs domaines sont convoqués ici : nombres et calculs, grandeurs et mesures. Les repères de progressivité indiquent que « les élèves [en 5^{e}] sont conduits à comparer des nombres rationnels, à en utiliser différentes représentations et à passer de l'une à l'autre », tandis qu'en 4^{e}, « les notions d'inconnue et de solution d'une équation sont abordées [...] pour aborder la mise en équation d'un problème et la résolution algébrique d'une équation du premier degré ».

Ces problèmes réinvestissent des faits numériques : décompositions et différentes représentations d'un même nombre. Les énoncés sont courts, mais portent sur des concepts numériques variés que les élèves peinent à appréhender (décimaux, pourcentages, fractions). Le choix des valeurs rendant les procédures par essais/ajustements peu efficaces, cela induit le recours à la modélisation (par exemple, le modèle en barres), appuyé éventuellement par la manipulation.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Ces problèmes (avec des données plus simples) sont abordés dès le début du cycle 3 et portent un objectif de continuité tant pour les élèves que dans le cadre de la liaison de cycle.

Étayés par le matériel de manipulation, ils peuvent être traités dès la 6^{e}. Le choix des variables didactiques (ici les valeurs numériques) permet de les faire évoluer tout au long du collège.

Ces problèmes s'intègrent dans une stratégie plus globale de travail autour des représentations des nombres. À l'école, les élèves sont entraînés à décomposer des nombres (avec des activités comme la fleur des nombres, le journal du nombre, etc.). Ces activités méritent d'être prolongées pour mettre en évidence les liens entre fractions, pourcentages et proportions, par exemple :

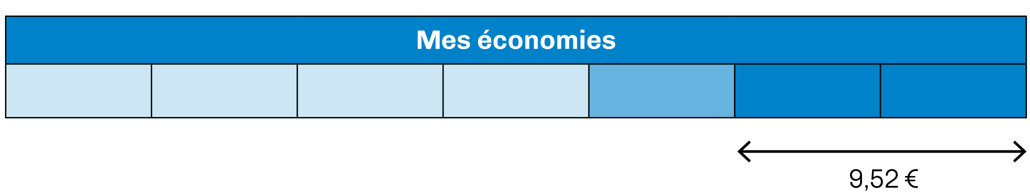
$\frac{2}{5} = 2 \times \frac{1}{5} =$ 2 cinquièmes $= 0{,}4 = \frac{40}{100} = 40\,\% =$ 40 centièmes.

Stratégies d'enseignement

Ces problèmes permettent d'envisager des procédures diverses en fonction de l'appropriation des notions mathématiques selon les élèves. En effet, le recours à la manipulation est facilitateur pour comprendre le besoin de réduire deux fractions au même dénominateur ou encore de comprendre ce qu'est la division par un nombre rationnel non nul.

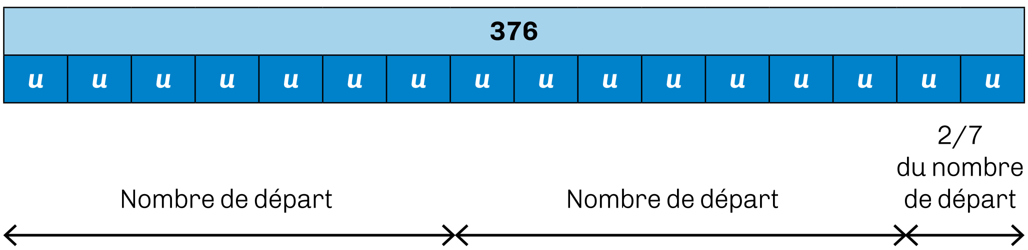
La modélisation permet ici de différencier les compétences « représenter », « modéliser » et « calculer », et de réaliser une évaluation plus fine des difficultés des élèves en mettant en évidence les réussites (évaluation positive).

Une modélisation possible pour le problème « Économies » :



Si on souhaite se concentrer uniquement sur la modélisation, il est possible de ne pas donner de valeurs numériques dans les questions[63] ; cela permet de rester sur le modèle et les concepts de fractions/proportions/pourcentages.

Pour le problème « **Devinette** », l'analyse de l'énoncé invite à prendre 7 unités pour modéliser le nombre de départ. D'où le modèle ci-dessous qui conduit à un schéma de 16 (= 7 + 7 + 2) « briques unité » valant 376. Cette approche permet de montrer aux élèves que « diviser par $\frac{16}{7}$ revient à diviser par 16 et multiplier par 7 donc multiplier par $\frac{7}{16}$ ». La méthode algébrique usuelle conduit à l'équation $2x + \frac{2}{7}x = 376$ ou encore $\frac{16}{7}x = 376$ qui mobilise les fractions.



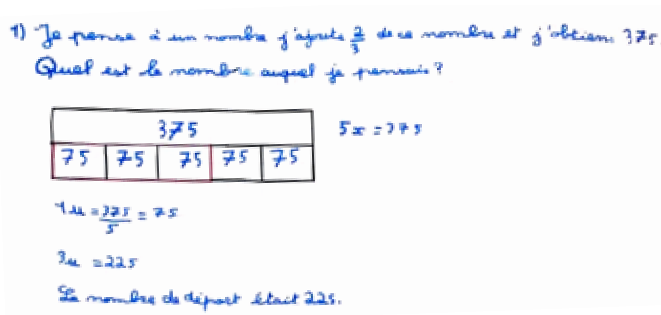


Figure 7. Une variante possible de l'exercice.

Cette entrée par la pré-algèbre peut être mise en parallèle avec l'écriture algébrique, permettant une transition plus douce et basée sur la structure de l'unité. Dans le premier exemple ci-contre, l'augmentation de 2 tiers du nombre de départ suggère le choix de prendre 3 briques pour le nombre de départ. Dans le second exemple (figure 8), la diminution de 25 %, soit le quart, indique de prendre 4 briques pour le nombre de départ.

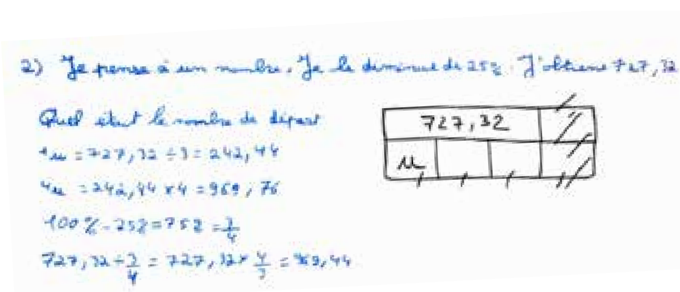
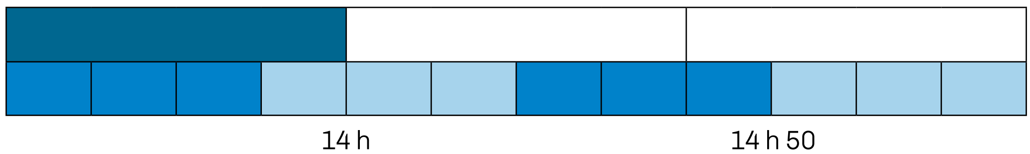


Figure 8. Une autre variante.

63 — L'énoncé serait alors : « Je dépense 4 septièmes de mes économies pour acheter un manteau et le tiers du reste pour une paire de chaussette. J'ai maintenant 9,52 €. Modéliser la situation. »

L'implicite de l'énoncé « **Le Grand Duc** » oblige le professeur et les élèves à faire une hypothèse importante : la marche s'effectue à vitesse constante.

Une modélisation permet, sans calcul de fractions, de prendre conscience que 5 « briques unité » valent 50 minutes. La difficulté est de placer, sur un même dessin, le tiers et les 3 quarts, ce qui suppose de l'avoir fait à l'école primaire en manipulant 12 cubes emboîtables. La marche du Grand Duc a donc commencé à 13 h 20.

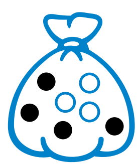


Cette modélisation évite la conceptualisation de l'inconnue (heure de départ, durée, chemin) qui présente une difficulté.

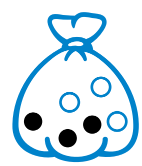
Problème 4. L'affaire est dans le sac[64]

Énoncé

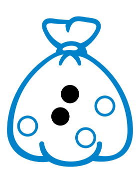
Dans les sacs suivants, il y a déjà des billes noires et des billes blanches.
Est-il possible d'ajouter un certain nombre (de ton choix) de billes rouges, de façon à satisfaire les indications données en dessous de chaque sac ?



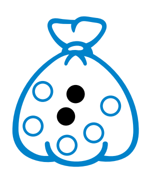
Sac 1 : la probabilité d'extraire une bille rouge est $\frac{5}{12}$.



Sac 2 : la probabilité d'extraire une bille rouge est $\frac{2}{5}$.



Sac 3 : la probabilité d'extraire une bille blanche ou rouge est $\frac{3}{4}$.



Sac 4 : la probabilité d'extraire une bille rouge est $\frac{3}{5}$.

64 — Brochures de l'Irem de Rouen sur l'enseignement des probabilités, *Probabilités - Statistiques, cinq scenarios ($3^{e}/2^{de}$)*, Blandine Masselin, Fabrice Mondragon, 2015, université de Rouen. Extrait modifié, p. 104-105.

Mots-clés

Probabilités, fractions, proportions, ratios.

Pourquoi ce problème ?

Ce problème permet un renforcement du concept d'équiprobabilité avec un travail dans les domaines numérique et littéral (pour le sac 4).

Les situations de tirages dans des sacs ou des urnes permettent aux élèves d'appréhender le hasard en lien avec le vocabulaire des probabilités (expérience aléatoire, issue, événement, probabilité) introduit au début du cycle 4. Les situations rencontrées en classe de 5^e sont l'occasion de placer un événement sur une échelle de probabilités et de déterminer des probabilités dans des situations très simples d'équiprobabilité. Les ratios permettent de modéliser et de comprendre la situation (ici, la composition des sacs).

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Ce problème, de milieu de cycle 4, convoque plusieurs domaines (probabilités, nombres et calculs). Outre le fait de mobiliser les nombres rationnels et l'algèbre, il fait travailler les probabilités dans des « situations simples qui ne relèvent pas nécessairement du modèle équiprobable ».

Stratégies d'enseignement

Ce problème permet d'envisager des procédures diverses en fonction de l'appropriation des notions mathématiques selon les élèves. Pour les trois premiers sacs, la manipulation ou une démarche essai/ajustement permet de résoudre le problème. Pour le sac n° 4, la manipulation, le recours à l'algèbre ou aux ratios permettent de montrer l'impossibilité d'une composition du sac répondant à la question posée.

CAS DU SAC 2

Il est intéressant de raisonner sur la constitution d'un sac pour lequel il y a une probabilité de $\frac{2}{5}$ de tirer une bille rouge. Dans cette situation, le ratio billes rouges pour billes des autres couleurs (blanches ou noires) est 2:3. Avant de considérer des ratios équivalents (4:6 par exemple), le professeur peut amener les élèves à s'interroger sur la signification du nombre 3 dans le ratio, dans le cas où le sac serait réduit à 5 billes.

CAS DU SAC 4

Le raisonnement sur le ratio billes rouges pour billes d'une autre couleur conduit à chercher un ratio de la forme a:7 équivalent à 3:2, avec a correspondant au nombre de billes rouges ajoutées dans le sac. La discussion invite l'élève à interroger une solution potentielle et à la confronter au contexte du problème, démarche à engager pour aiguiser le sens critique.

POUR ALLER PLUS LOIN (CAS DU SAC 4)

Les enjeux de l'énoncé suivant portent sur l'absence de représentation initiale et la présence de deux inconnues : « Un sac contient des billes blanches et noires dans le **ratio** 5:2. En ajoutant des billes rouges, la probabilité maintenant de tirer une bille rouge est de $\frac{3}{5}$. Combien de billes de chaque couleur y a-t-il maintenant au minimum dans le sac ? »

Problème 5. Plusieurs inconnues dans le jeu

Énoncés

1. Pour le championnat de rugby, une équipe reçoit 3 points par victoire, 1 point par match nul. Après 25 matchs, une équipe a marqué 55 points. Combien de matchs ont-ils pu perdre ?

- **a.** aucun
- **b.** 5
- **c.** 3
- **d.** 2

2. Un groupe d'amis a dépensé 390 € au restaurant. Certains (le groupe A) ont dépensé 30 € chacun et les autres (le groupe B) ont dépensé 20 €. Combien pouvait-il y avoir de personnes dans les groupes A et B ?

Mots-clés

Pourcentages, proportions, fractions, algèbre, système d'équations du premier degré, équations diophantiennes, variables, inconnues, critères de divisibilité, modéliser, chercher, calculer, raisonner.

Pourquoi ce problème ?

La première question contribue à la prise d'initiative de l'élève. L'énoncé est court, mais chaque donnée est importante et il y a un implicite sur le nombre de points en cas de match perdu.

L'énoncé met en œuvre trois inconnues et deux équations (que l'on peut aussi résoudre grâce aux propriétés de divisibilité des entiers) et induit à ce niveau une stratégie rarement utilisée dans les QCM consistant à essayer chacune des valeurs proposées pour ramener ce problème à une équation avec une seule inconnue.

La seconde question se ramène à l'équation diophantienne $30a + 20b = 390$ où a représente le nombre de personnes du groupe A et b le nombre de personnes du groupe B. Au collège, une stratégie basée sur les critères de divisibilité peut éventuellement permettre de trouver toutes les solutions possibles.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Pour la première question, en 5^{e}, l'introduction d'une expression littérale est possible, la lettre[65] employée ayant le statut de variable. L'usage du tableur (comme ci-dessous), de la calculatrice ou d'un algorithme permettra de déterminer la valeur recherchée. Les démarches envisageables par les élèves sont le principe d'itération ou d'essai/erreur, la manipulation d'expressions algébriques voire la modélisation.

	A	B	C	D
1	GAGNÉS	NULS	POINTS	
2	0	=20-A2	20	
3	1	19	22	
4	2	18	24	
5	3	17	26	
6	4	16	28	
7	5	15	30	
8	6	14	32	
9	7	13	34	
10	8	12	36	
11	9	11	38	
12	10	10	40	
13	11	9	42	
14	12	8	44	
15	13	7	46	
16	14	6	48	
17	15	5	50	
18	16	4	52	
19	17	3	54	
20	18	2	56	
21	19	1	58	
22	20	0	60	

Figure 9. L'usage du tableur, pour déterminer la valeur recherchée.

En fin de cycle 4 et en 2de, l'introduction d'équations sera attendue, ce qui permet le passage de la variable à l'inconnue. L'utilisation des propriétés de divisibilité dans l'équation diophantienne $3a + b = 55$ est un attendu du lycée.

Pour la seconde question, en fin de cycle 4 et en 2de, après simplification de l'équation obtenue, les critères de divisibilité et la notion de nombres premiers entre eux permettent d'aller plus vite dans la résolution de ce problème.

En terminale (option mathématiques expertes), ce problème consiste à résoudre une équation diophantienne avec discussion sur les couples solutions à retenir.

65 — La lettre rencontrée dans la scolarité d'un élève peut être une abréviation, une unité de mesure, le nom d'un point en géométrie, une indéterminée, une inconnue, une variable ou un paramètre.

Stratégies d'enseignement

Le professeur peut inciter les élèves à essayer les différentes valeurs proposées pour le nombre de matchs perdus (0, 5, 3 ou 2) pour amener les élèves à penser que le nombre de matchs nuls ou gagnés est alors 25, 20, 22 ou 23.

L'utilisation d'un tableur (ci-dessous, le cas où l'équipe a perdu 5 matchs), permet d'identifier une variable de travail et d'explorer toutes les possibilités, ce qui constitue une preuve (par disjonction de cas).

Pour la modélisation algébrique dans le cas présent, en notant x le nombre de matchs gagnés, le nombre de matchs nuls vaut alors $20 - x$. Le nombre de points marqués est $3x + (20 - x) = 2x + 20$. Cette expression algébrique vaut 55, ce qui permet de conclure $x = 17{,}5$.

Le retour au problème posé – qui constitue le cœur de la démarche de modélisation (partir du réel, modéliser, revenir au réel) – permet d'écarter cette solution trouvée, car 17,5 n'est pas un nombre entier.

Pour la seconde question, en fin de cycle 3 et début de cycle 4, on peut demander aux élèves de tester des couples solutions. Ces calculs élémentaires permettent de réinvestir les priorités opératoires, la manipulation d'une expression littérale où apparaissent deux variables. Il est possible également de fixer une variable (par exemple le nombre de personnes dans le groupe A) et de déterminer alors lorsque cela est possible, l'autre variable (qui prend alors le statut d'inconnue). Les critères de divisibilité peuvent être mobilisés pour répondre à des questions du type : « Est-il possible qu'il y ait 6 personnes dans le groupe A ? »

Tout comme pour la première question, l'usage du tableur permet de déterminer l'ensemble des couples solutions recherchés.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	Nb A\nb B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	0	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400
3	1	30	50	70	90	110	130	150	170	190	210	230	250	270	290	310	330	350	370	390	410	430
4	2	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400	420	440	460
5	3	90	110	130	150	170	190	210	230	250	270	290	310	330	350	370	390	410	430	450	470	490
6	4	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400	420	440	460	480	500	520
7	5	150	170	190	210	230	250	270	290	310	330	350	370	390	410	430	450	470	490	510	530	550
8	6	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400	420	440	460	480	500	520	540	560	580
9	7	210	230	250	270	290	310	330	350	370	390	410	430	450	470	490	510	530	550	570	590	610
10	8	240	260	280	300	320	340	360	380	400	420	440	460	480	500	520	540	560	580	600	620	640
11	9	270	290	310	330	350	370	390	410	430	450	470	490	510	530	550	570	590	610	630	650	670
12	10	300	320	340	360	380	400	420	440	460	480	500	520	540	560	580	600	620	640	660	680	700
13	11	330	350	370	390	410	430	450	470	490	510	530	550	570	590	610	630	650	670	690	710	730
14	12	360	380	400	420	440	460	480	500	520	540	560	580	600	620	640	660	680	700	720	740	760
15	13	390	410	430	450	470	490	510	530	550	570	590	610	630	650	670	690	710	730	750	770	790

Problème 6. Ça texte beaucoup !

Énoncé

Lors d'un concours de rapidité d'envoi de SMS, quatre élèves sont en compétition.
— Le premier peut en envoyer 3 pendant que le deuxième en envoie 2.
— Le deuxième peut en envoyer 5 pendant que le troisième en envoie 6.
— Le troisième peut en envoyer 7 pendant que le quatrième en envoie 8.
Pendant la durée du concours, le deuxième a envoyé 70 SMS.
Quel est le vainqueur du concours ?

Mots-clés

Défi mathématique, fraction et comparaison, ratio, grandeur sans dimension.

Pourquoi ce problème ?

Ce problème, qui permet de fréquenter des grandeurs sans dimension, met en jeu plus de deux protagonistes. Cette situation s'apparente à un problème avec prise d'initiative et permet à l'élève de mobiliser en particulier les compétences « chercher », « calculer ».

Le problème permet d'avoir recours à différentes stratégies et de réinvestir la notion de ratio, performante ici, pour trouver une relation en termes de proportions entre les participants.

Stratégies d'enseignement

Même si le bon sens invite l'élève à comparer le premier et le quatrième scripteur, la comparaison entre le deuxième et le troisième est nécessaire au raisonnement.

EN EXPLORANT LA PROPORTIONNALITÉ ET EN PROCÉDANT PAR ÉTAPE

Premier	Deuxième
3	2
105	70

Deuxième	Troisième
5	6
70	84

Troisième	Quatrième
7	8
84	96

EN UTILISANT LES RATIOS ÉQUIVALENTS

Premier	Deuxième	Troisième	Quatrième
3	2		
3 x 5	2 x 5	2 x 6	
3 x 5 x 7	2 x 5 x 7	2 x 6 x 7	2 x 6 x 8
105	70	84	96

En résumé

- Les problèmes de ce chapitre proposent des énoncés numériques variés qui peuvent permettre des changements de cadre. Ils mobilisent de nombreuses notions mathématiques (fractions, proportionnalité, ratios, géométrie, pourcentages, équations). Ils présentent aux élèves des mathématiques concrètes, propices à la mise en œuvre d'une démarche expérimentale.

- Le travail proposé met en avant des outils (de manipulation, numériques, de modélisation) facilitant l'entrée des élèves dans la résolution de problèmes et permettant d'aborder des problèmes qui leur sont jusqu'ici résistants.

- Les élèves sont amenés à se créer des représentations mentales des nombres qui facilitent la compréhension et la résolution des problèmes. Ils apprennent également à mettre en œuvre une démarche scientifique allant des représentations à l'abstraction.