IV

Patterns. Des problèmes pour travailler les pensées algorithmique et algébrique

En France, les patterns sont surtout synonymes de jeux de logique et ils sont peu présents dans les programmes, bien qu'apparaissant à l'école primaire sous le vocable « suites organisées ». La mise en œuvre des problèmes de ce chapitre illustre la manière dont les patterns développent les pensées algorithmique et algébrique. La stratégie de résolution de problèmes, fondée sur l'observation, le questionnement ou l'expérimentation, consiste à chercher des invariants, des régularités, des relations entre les motifs. Une fois la structure du pattern comprise, il faut expliquer, décrire la règle en langage naturel ou mathématique. Ces problèmes favorisent le développement des compétences « chercher », « représenter » et « raisonner » autour de problèmes atypiques, dans la continuité du cycle 3.

Entrée historique[101]

Dans les classes de cycle 1, les élèves organisent des suites d'objets en fonction de critères[102]. Au collège, on trouve quelques activités d'introduction de la lettre en algèbre utilisant des patterns figuratifs, comme les situations du carré bordé ou des triangles en allumettes pour faire produire des formules.

Les patterns sont pourtant classiques dans de nombreux curriculums étrangers depuis que le *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), association d'enseignants de mathématiques en Amérique du Nord, a proposé, en 2000, d'intégrer un nouveau domaine de contenu, *Patterns, Functions and Algebra*, valable de la maternelle à la 12e année.

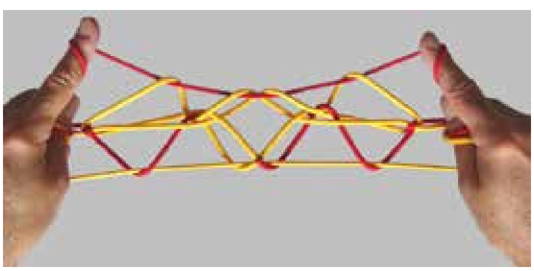
Plusieurs pays ont intégré dans leurs curriculums dès les premières années de l'école primaire l'utilisation des patterns pour développer la pensée algébrique : les États-Unis, les provinces anglophones du Canada, l'Australie, le Brésil, etc.

101 — Contribution de Sophie Roubin.
102 — Extrait des programmes de 2015 de l'école maternelle à propos des formes, grandeurs et suites organisées : « dès la petite section, les enfants sont invités à organiser des suites d'objets en fonction de critères de formes et de couleurs ; les premiers algorithmes qui leur sont proposés sont constitués d'alternances simples. Dans les années suivantes, progressivement, ils sont amenés à reconnaître un rythme dans une suite organisée et à continuer cette suite, à inventer des "rythmes" de plus en plus compliqués, à compléter des manques dans une suite organisée ».

Depuis 2013, il existe un Observatoire international de la pensée algébrique[103] qui rassemble des chercheurs intéressés par son développement dès l'école primaire[104].

Algorithmes et motifs/patterns dans des pratiques ethnomathématiques[105]

L'ethnomathématique désigne aujourd'hui un champ de recherche consacré à l'étude des pratiques et des savoirs mathématiques impliqués dans diverses activités, menées en dehors des institutions académiques ou scolaires, dans des sociétés non occidentales notamment. Il s'agit donc d'élargir notre point de vue sur les mathématiques en y incluant l'ensemble des activités pour lesquelles on peut mettre en évidence une dimension mathématique. Dans ce cadre, certains ethnomathématiciens étudient les aspects mathématiques d'activités techniques (ou artistiques) pratiquées dans des sociétés autochtones où prédomine souvent l'oralité. À titre d'exemple, les pratiques d'entrelacement de fils (vannerie, tressage de nattes ou de paniers, jeu de ficelle, par exemple) ou de tracés de ligne continue contrainte par une grille composée de lignes ou de points (*sona* des Chokwe de l'Angola, dessin sur le sable de Vanuatu dans le Pacifique sud, *kōlam* du Tamil Nadu en Inde, par exemple) peuvent être appréhendées comme de véritables activités à caractère algorithmique et géométrique.



© Éric Vandendriessche

Ces diverses activités impliquent la mise en œuvre d'opérations spatiales, organisées en séquences ordonnées assimilables à des algorithmes. Ces derniers sont dits « géométriques » dans le sens où leur exécution a pour finalité la réalisation d'une « figure » composée de différents motifs de base.

103 — https://www.oipa.education/pour-en-savoir-voir-plus
104 — Hassane Squalli, Izabella Oliveira, Alain Bronner, Mirène Larguier, *Le Développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires*, Québec, 2020. Livres en ligne du Centre de recherche et d'intervention sur la réussite scolaire (Crires) : https://lel.crires.ulaval.ca/sites/lel/files/le_developpement_de_la_pensee_algebrique_a_lecole_primaire_et_au_debut_du_secondaire.pdf ; *Le Développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel*, vol. 1, sous la direction de Hassane Squalli et Alain Bronner. Volume 20, numéro 3, 2017 : https://www.erudit.org/fr/revues/ncre/2017-v20-n3-ncre04255/
105 — Contributions de Christine Proust, Marc Moyon, Dominique Tournès, Éric Vandendriessche.

© Éric Vandendriessche

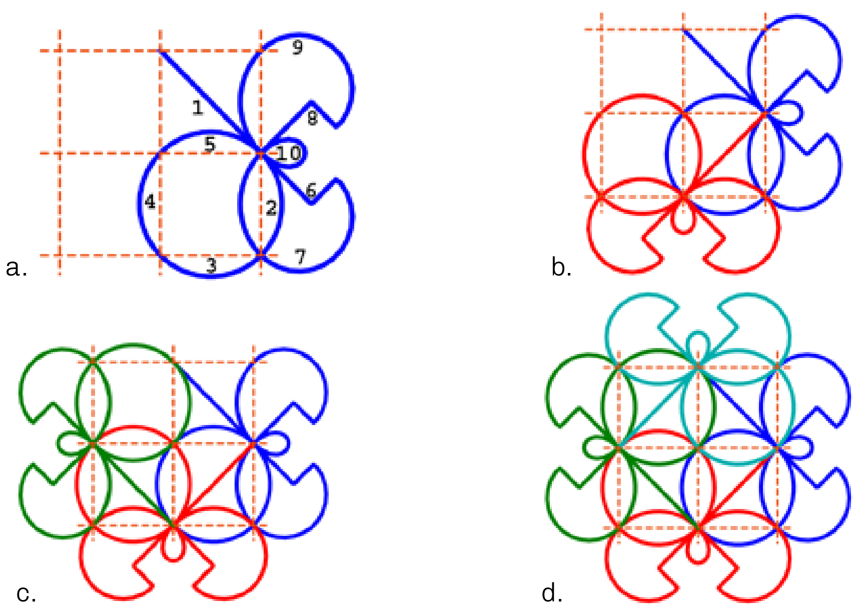
Ces algorithmes géométriques, sous-tendus par quelques règles opératoires, ont été les outils de travail qui ont permis aux praticiens (dessinateurs, vanniers, tisserands, etc.) de mener des investigations dans des configurations spatiales parfois d'une grande complexité.

Ces investigations impliquent par ailleurs l'usage de certains concepts mathématiques : les « transformations » de procédures ou de figures finales, les « itérations » de séquences d'opérations ou de motifs, ainsi que les « symétries » de figures, sont des concepts omniprésents dans ces diverses pratiques (ethno)mathématiques.

© Éric Vandendriessche

Exemples

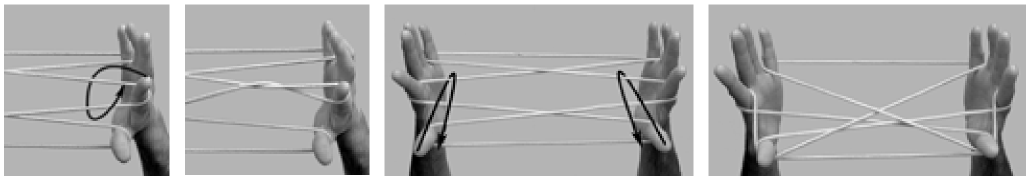
1. Dessin sur le sable dénommé *nimbingge* (une variété d'igname – voir l'image ci-contre) de l'île de Malekula (Vanuatu, Pacifique sud) analysé par la mathématicienne américaine Marcia Ascher (1935-2013) comme le résultat de l'itération d'un même motif[106].



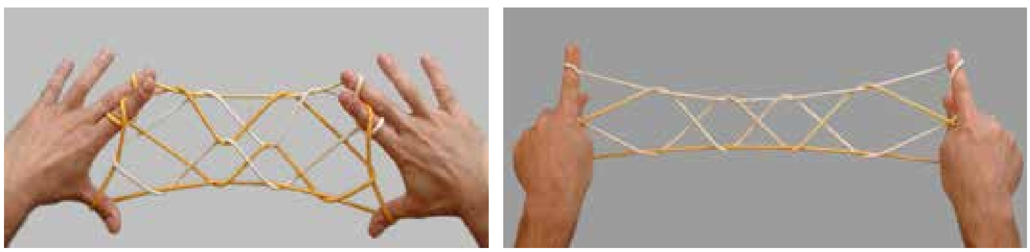
© Alban Da Silva.

106 — Marcia Ascher, *Mathématiques d'ailleurs. Nombres, formes et jeux dans les sociétés traditionnelles*, 1998, traduction de l'anglais (États-Unis) et postface de Karine Chemla et Serge Pahaut (traduit et publié avec le concours du Centre national des lettres), p. 281, Le Seuil, Paris, 1998 (éd. orig. : *Ethnomathematics, A Multicultural View of Mathematical Ideas*. Pacific Grove, California, Brooks and Cole Publishing Compagny).

2. La pratique communément appelée « jeu de ficelle » consiste à exécuter, avec les doigts, une succession de « gestes simples » assimilables à des « opérations élémentaires » (voir les images ci-dessous), engendrant l'obtention d'une figure à partir d'une boucle de fil. Tout jeu de ficelle peut ainsi être analysé comme une procédure (ou algorithme) composée d'une succession ordonnée d'opérations élémentaires.



Le concept de « transformation » est omniprésent dans la pratique du jeu de ficelle. Ci-dessous, transformation de la figure « *salibu* » (miroir) des îles Trobriand (Papouasie-Nouvelle-Guinée) en une figure à quatre « losanges »[107].



107 — https://www.ethnographiques.org/IMG/html/pw16-mwaya-tomdawaya.html

Point sur la recherche[108]

Traditionnellement, l'algèbre n'est pas enseignée avant le niveau secondaire (cycle 4 en France). Cependant, dans les années 1990, l'idée de développer la pensée algébrique[109] dès l'école primaire émerge et donne lieu au courant de recherche étiqueté *Early Algebra*[110] ou pré-algèbre. Cette perspective amène à définir la pensée algébrique autrement que par le recours au symbolisme algébrique. La pensée algébrique, selon Luis Radford[111], est caractérisée par :

— l'indéterminée, c'est-à-dire que le problème met en jeu des quantités ou nombres non connus ;
— la dénotation, qui consiste à désigner cette indéterminée de différentes manières possibles (langage naturel, geste, etc.) ;
— l'analyticité, qui suppose de pouvoir traiter les quantités indéterminées comme si elles étaient connues.

Les activités de généralisation basées sur des patterns, qui visent à faire identifier et exprimer des régularités, sont particulièrement adaptées au développement de la pensée algébrique. Comme le précisent Joëlle Vlassis, Isabelle Demonty et Hassane Squalli[112], « ces activités répondent aux critères d'une pensée algébrique dans la mesure où leur objectif consiste à formuler un moyen général au départ d'une indéterminée, en l'occurrence d'une variable. Ces activités invitent à exprimer les généralités produites et leurs justifications dans un langage tout d'abord non conventionnel et qui tend à devenir de plus en plus conventionnel au fil des nécessités de l'activité » (p. 135). Cette expression de généralité permet d'anticiper, de prédire ce qui se passe pour chaque élément, quel que soit son rang dans le pattern, même éloigné et non atteignable directement. C'est précisément cette anticipation qui différencie le mode de pensée algébrique du mode de pensée algorithmique. Cette dernière, aussi appelée pensée informatique ou computationnelle, est définie par Margarida Romero (2016)[113] comme « un ensemble de stratégies de pensée cognitive et métacognitive liées à la modélisation de connaissances et de processus, à l'abstraction, à l'algorithmique et à l'identification, la décomposition et l'organisation de structures complexes et de suites logiques ». La première étape dans la résolution

108 — Contribution de Jana Trgalova.
109 — Volume 22, numéro 1, 2020, *Le Développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel*, vol. 2, sous la direction de Hassane Squalli et Alain Bronner : https://www.erudit.org/fr/revues/ncre/2020-v22-n1-ncre05349/
110 — Carolyn Kieran, JeongSuk Pang, Deborah Schifter, Swee Fong Ng, *Early Algebra. Research into its Nature, its Learning, its Teaching*, ICME-13, Topical Surveys, Springer, 2016.
111 — Luis Radford, "The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking", *Mathematics Education Research Journal*, 26, p. 257-277, 2014.
112 — Joëlle Vlassis , Isabelle Demonty, Hassane Squalli, « Développer la pensée algébrique à travers une activité de généralisation basée sur des motifs (patterns) figuratifs », *Nouveaux Cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), p. 131-155, 2017.
113 — https://margaridaromero.me/2016/05/05/la-pensee-informatique/

d'un problème basé sur un pattern consiste à identifier et à décrire la structure du pattern de manière à pouvoir le prolonger au-delà des éléments présents dans l'énoncé. Le mode de pensée algorithmique est ainsi mis en jeu.

Mathématiques. Définition d'un pattern

Le **pattern** est un anglicisme signifiant « motif », « règle de structure », « modèle à reproduire ». C'est une suite d'objets appelés **éléments**, reliés les uns aux autres par une règle spécifique. Il existe deux types de patterns utilisés en résolution de problèmes :

— les patterns répétitifs (*repeating patterns*) ;
— les patterns évolutifs (*increasing/growing patterns*) en passant d'un rang à un autre.

Le **motif de base** (« *core* » en anglais) correspond à la chaîne d'éléments la plus courte qui se répète dans le pattern répétitif ou qui évolue dans le pattern évolutif.

Exemple

Sur le pattern suivant, si on regarde les figures (triangles et carrés) sur les cubes, sans prendre en compte leur couleur, on reconnaît un pattern répétitif dont le motif de base est : 

Si, en revanche, on regarde la couleur des cubes, sans prendre en compte les figures, on reconnaît un pattern évolutif dont le motif de base est le même, mais qui évolue au niveau du nombre de cubes roses.

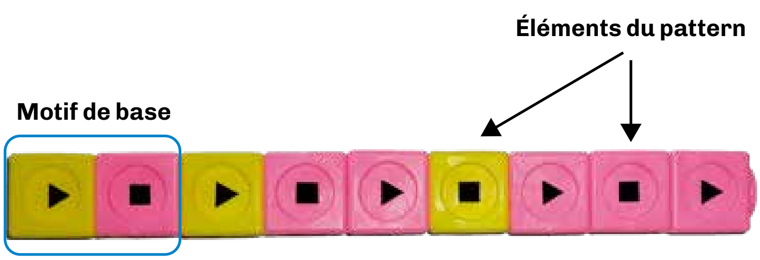
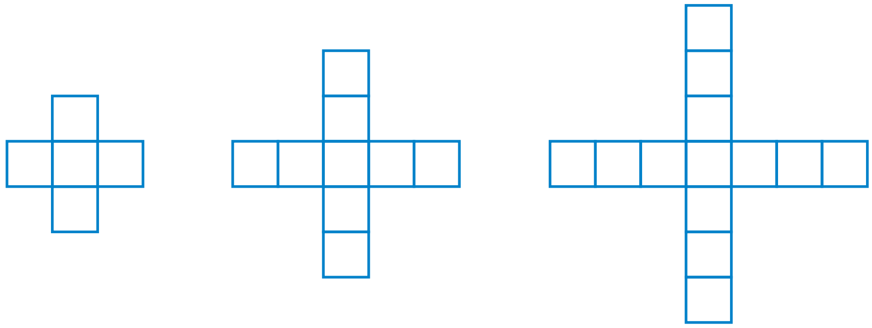


Figure 19. Pattern répétitif et pattern évolutif.

Focus | Une séquence d'enseignement autour d'un pattern

Énoncé

Avec des petits carrés tous identiques, on construit un pattern selon le modèle évolutif ci-dessous :



Rang 1 **Rang 2** **Rang 3**

a. Dessiner l'élément du rang suivant et expliquer la règle.
b. Déterminer le nombre de petits carrés des éléments du rang 5, du rang 10, du rang 17.
c. Déterminer le nombre de petits carrés de l'élément du rang 100.
d. Trouver un moyen de calculer rapidement le nombre de petits carrés d'un élément à n'importe quel rang.
e. Existe-t-il un élément qui contient 532 petits carrés ? Un élément qui contient 813 petits carrés ?

Mots-clés

Patterns figuratif et évolutif, chercher, exprimer une règle, relation de récurrence, généraliser, raisonner, pensée algébrique.

Pourquoi ce problème ?

Les élèves sont amenés à étudier les liens constitutifs entre les étapes d'un pattern figuratif (c'est-à-dire représenté par une figure) pour d'une part comprendre et décrire la structure (ce qui contribue au développement de la pensée algorithmique) et d'autre part arriver à prédire, à généraliser le motif à une étape éloignée (ce qui développe le mode de pensée algébrique) ; le passage du langage naturel au langage mathématique pour « décrire, comprendre et prévoir cette évolution du phénomène » contribue ainsi à la compétence « modéliser ».

Dans ce focus sont développées toutes les phases du questionnement usuel dans ce type de problèmes :
— dessiner le rang suivant et chercher une relation, comprendre la construction du motif (seul ou en groupe) et la verbaliser (en classe) ;
— faire calculer le nombre d'éléments en étape proche ;
— calculer le nombre d'éléments en étape lointaine (rang 100) ;
— trouver un moyen de calculer les éléments constitutifs du pattern à n'importe quel rang.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Ce problème peut être donné dans toutes les classes du collège et dès le cycle 3. Selon l'âge des élèves et en tenant compte de leurs difficultés, l'attendu se formalise ; il s'agit de passer de l'expression en langage naturel, en début de cycle 3, à l'expression littérale en fin de cycle 4.

Stratégies d'enseignement

Lors des premières rencontres, il importe de définir et d'institutionnaliser le vocabulaire : patterns répétitifs et patterns évolutifs.

Les élèves sont encouragés à étudier la structure du pattern et à exprimer la règle qui permet de les construire. Il importe de ménager des temps de mise en commun où les élèves seront amenés à verbaliser leurs stratégies.

ÉTAPE 1. DESSINER L'ÉLÉMENT SUIVANT ET EXPLIQUER LA RÈGLE DE CONSTRUCTION

Cette première phase de questionnement engage l'élève dans l'action. Il s'agit pour l'enseignant de vérifier que les élèves se sont bien représenté le problème et ont compris la construction du pattern. Une description de la construction de l'élément de rang 4 est attendue, elle peut être donnée sous forme d'indices sur le dessin, de phrases utilisant des termes spatiaux (en haut, en bas, etc.).

Selon le niveau des élèves, l'enseignant choisira de simplement circuler – pour vérifier la bonne compréhension du problème – ou de faire une rapide mise en commun, mais en restant vigilant, à ce stade, à ne pas exprimer ou faire exprimer la relation en fonction du rang (ici une relation de récurrence).

À l'aide des Rang 1, 2 et 3 j'ai observé que l'on ajoute
4 carrés a chaques colones.

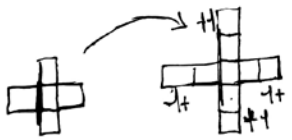


Figure 20. Production d'élève.

ÉTAPE 2. FAIRE CALCULER LE NOMBRE D'ÉLÉMENTS EN ÉTAPE PROCHE

Les éléments étudiés sont de rangs proches, ce qui laisse la possibilité aux élèves de dessiner et de dénombrer sur le dessin. L'augmentation du rang a pour but d'amener les élèves vers une procédure de calcul. Si ce n'est pas le cas, les mises en commun et les partages de procédures devraient encourager les élèves à faire des calculs.

Imaginer reconnaître une situation de proportionnalité est une erreur fréquente à cette étape.

17 + 4 = 21 rang 4 = 21 carrés

17 + (4 x 6) = 41 rang 10 = 41 carrés

rang 3 + rang 4 + rang 10
13 + 17 + 41 = 71

rang 17 = 71 carrés

Figure 21 et 22. Productions d'un élève. L'élève réussit l'étape 4 et l'étape 10, mais pour l'étape 17, il utilise la linéarité.

Pour aider à la résolution, l'utilisation d'un tableau pour organiser les données permet de passer du registre figuratif au registre numérique. Avoir recours à cette représentation ordonnée est une stratégie de résolution à favoriser chez les élèves, facilitant l'observation des régularités.

Rang de l'élément	1	2	3	4	...
Nombre de petits carrés	5	9	13	17	

+ 4 + 4 + 4

ÉTAPE 3. CALCULER LE NOMBRE D'ÉLÉMENTS EN ÉTAPE LOINTAINE (RANG 100)

L'augmentation du rang est telle qu'il n'est plus possible de dessiner. Le nombre 100 est également choisi en lien avec le nombre 10 pour invalider l'hypothèse de proportionnalité ; c'est souvent à cette étape que les élèves sont tentés par une procédure linéaire, comme l'élève ci-dessous qui n'avait pourtant pas utilisé la proportionnalité jusqu'alors.

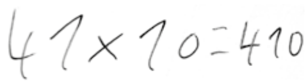
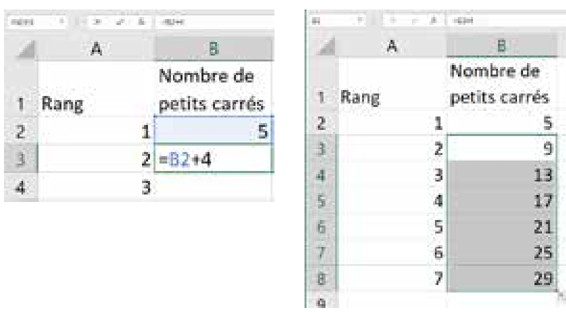


Figure 23. Production d'un élève qui utilise une procédure linéaire.

L'utilisation du tableur est une stratégie de résolution efficace dans les problèmes utilisant les patterns. Manipulé souvent par l'enseignant au cycle 3 et début de cycle 4 (pour accompagner la découverte de son fonctionnement avec lignes, colonnes, cellules et formules simples), il est attendu en cycle 4 une aisance suffisante pour motiver les élèves dans la recherche d'une formule.

En étirant la formule, il est possible de trouver le nombre de petits carrés au rang souhaité, sans avoir recours à une expression littérale ou l'utilisation du code (Scratch par exemple).

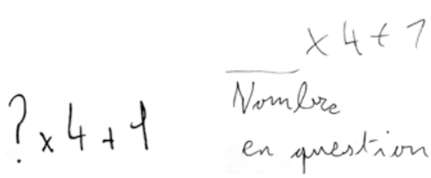
Pour des rangs plus éloignés, une formule pourra être insérée dans une autre colonne pour permettre la comparaison avec les nombres obtenus dans la colonne B.



ÉTAPE 4. TROUVER UN MOYEN DE CALCULER LES ÉLÉMENTS CONSTITUTIFS DU PATTERN À N'IMPORTE QUEL RANG

Il s'agit dans cette phase de généralisation d'être capable de s'éloigner de la relation de récurrence afin de trouver une relation directe (« *closed formula* ») qui permettra d'obtenir le nombre de petits carrés au rang *n* sans utiliser de rang intermédiaire. C'est une phase d'abstraction qui incite à utiliser la lettre *n* comme variable.

L'enseignant demandera aux élèves d'expliciter leur procédure. Au cycle 3, la généralisation du processus peut s'exprimer en langue naturelle, puis à partir du cycle 4, l'introduction d'expressions algébriques par les élèves et le questionnement de leur équivalence par le professeur, sont des attendus.

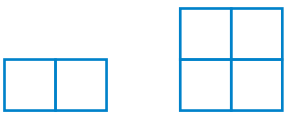


Figures 24 et 25. Traces écrites d'élèves de fin de cycle 3 (6e).

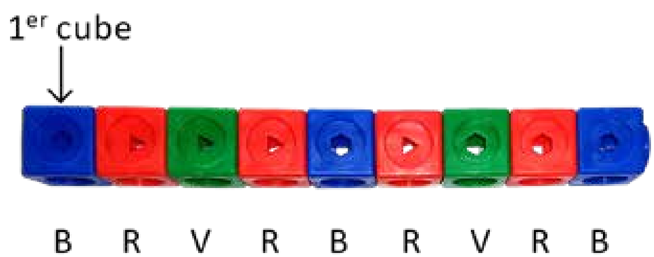
Problème 1. Des énoncés pour des rituels

Énoncés

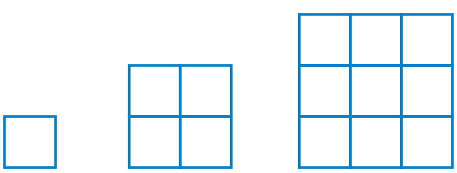
Rituel 1. Voici le début d'un pattern.
Dessiner les trois éléments suivants en expliquant la règle utilisée.



Rituel 2. Voici le début d'un pattern.
Inventer d'autres patterns qui suivent la même règle.



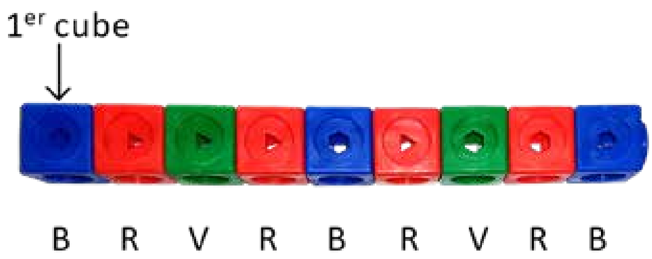
Rituel 3. Avec des petits carrés tous identiques, je construis des motifs selon le modèle évolutif ci-dessous.
En expliquant, calculer le nombre de petits carrés nécessaires pour construire le 10e motif.



Rituel 4. Voici une liste de nombres.
Si l'on poursuit la liste avec la même règle, les nombres 62 et 693 sont-ils des éléments de cette liste ?

2	5	8	11	14	17	...

Rituel 5. Voici un pattern.
Quelle est la couleur du 23e cube ?



Mots-clés

Patterns figuratif et évolutif, chercher, exprimer une règle, relation de récurrence, raisonner, pensée algébrique, pensée algorithmique, créativité.

Pourquoi ce problème ?

Ces rituels permettent d'exposer régulièrement les élèves à différents types de patterns et de régularités et aux professeurs de travailler certaines phases du questionnement indiquées dans le focus.

Il s'agit de chercher, dans les premiers rituels, différentes régularités permettant de générer les éléments suivants d'un pattern et d'apprendre à les verbaliser. Cette tâche encourage les élèves à être créatifs lorsqu'ils décrivent les règles possibles, à développer leurs pensées algorithmique (reconnaissance de la structure) et algébrique (anticipation, généralisation).

Dans un second temps, les rituels s'enrichissent des étapes permettant de calculer ou de déterminer les éléments en étapes proche ou lointaine, puis à n'importe quel rang.

Stratégies d'enseignement

Ce type de problèmes peut être vu comme un défi mathématique. Le matériel de manipulation peut aider à la compréhension de la structure, à faire des essais, à vérifier une anticipation.

Ces énoncés sont à utiliser en rituels espacés[114], mettant en jeu patterns évolutifs, répétitifs, sous forme figurative ou de nombres[115]. Il est conseillé d'être attentif à alterner les types de patterns lors de l'utilisation dans les classes, pour varier les régularités et éviter que les élèves utilisent toujours la même stratégie. Cependant, un même pattern peut être aussi décliné de façon progressive et constituer le fil rouge dans la programmation des rituels sur une période donnée (une question par séance).

L'objectif du premier rituel est de développer la pensée algorithmique. Les élèves doivent comprendre la structure du pattern, c'est-à-dire expliquer une règle qui décrit comment le pattern évolue, et la verbaliser ; expliciter les régularités possibles pour des problèmes de généralisation développe l'oralité et l'argumentation. Cette tâche les encourage à être créatifs en décrivant les règles possibles, et développe leurs pensées algorithmiques (reconnaissance de la structure).

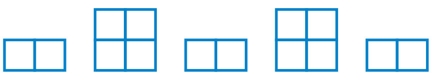


Figure 26. Pattern répétitif.

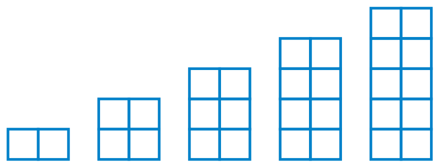
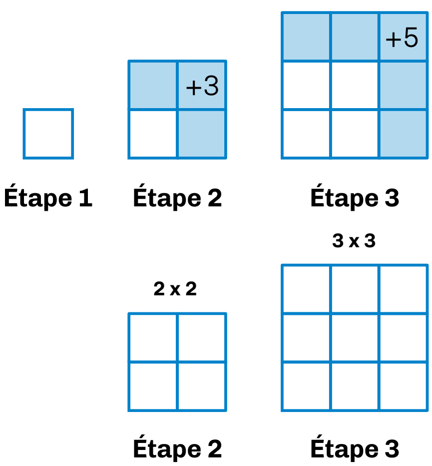


Figure 27. Pattern évolutif.

Le changement de registre est travaillé à travers le rituel 2. Le professeur pourra expliciter ce qui est attendu lorsque l'élève est confronté à ce genre de problèmes pour la première fois. Ici, tout pattern répétitif a un motif de base formé de quatre éléments. Les trois premiers sont différents et le quatrième est le même que le deuxième ; par exemple 1 ; 2 ; 3 ; 2 ; 1 ; 2 ; 3 ; 2 ; 1 ou △○▯○△○▯○△. L'élève pourra choisir une suite de nombres, des notes de musique, des pas de danse, etc., avec la possibilité d'y ajouter un challenge type « battle » pour motiver la classe et la créativité.

Le rituel 3 aborde la pensée algébrique et entraîne les élèves à visualiser la structure d'un nombre carré parfait en lui associant la disposition géométrique correspondante. La confrontation de différents patterns, comme ci-dessous, permet d'expliquer des égalités algébriques[116].



Pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on ajoute $2n + 1$ carrés.

L'étape n contient n^2 carrés.

114 — La « mise en Train » (Train : travail de recherche ou d'approfondissement avec prise d'initiatives) : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/05-Train-C.pdf

115 — Une bibliothèque de motifs : http://www.visualpatterns.org/, et pour créer des patterns : http://www.dudamath.com

116 — L'étape $n + 1$ contient $(n + 1)^2$ carrés, donc $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

La liste de nombres du rituel 4 définit un pattern évolutif numérique (il est important d'alterner les patterns figuratif et numérique).

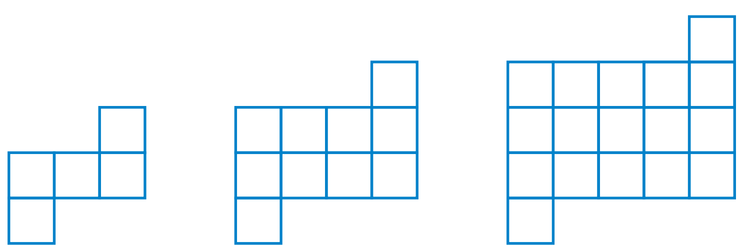
Un nombre est dans cette liste si et seulement si il est la somme de 2 et d'un multiple de 3. Lorsqu'on lui ajoute 1 (ou enlève 2), alors il est dans la table de 3. Ce pattern de nombres fait travailler les critères de divisibilité et donne du sens au reste dans la division euclidienne.

Le rituel 5 reprend le pattern du rituel 2. Cette reprise impose à l'élève de bien lire l'énoncé pour repérer les indices sur la structure et la question associée. La question posée permet de travailler division euclidienne et division quotition. La résolution experte convoque la division euclidienne et amène à voir le reste comme la couleur du cube dans le motif de base (les élèves pourront remarquer que le cube est rouge pour les places paires)[117].

Problème 2. Des petits carrés

Énoncé

Avec des petits carrés tous identiques, on construit un pattern selon le modèle évolutif ci-dessous.
Trouver un moyen de calculer le nombre de petits carrés d'un élément à n'importe quel rang.



Rang 1 Rang 2 Rang 3

Mots-clés

Patterns figuratif et évolutif, exprimer une règle, relation de récurrence, généraliser, chercher, raisonner.

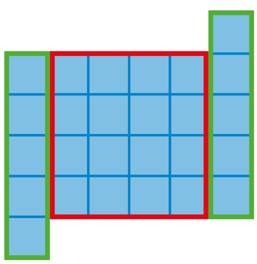
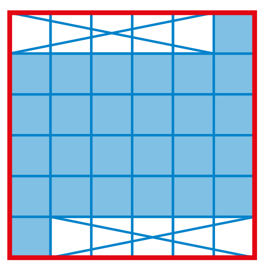
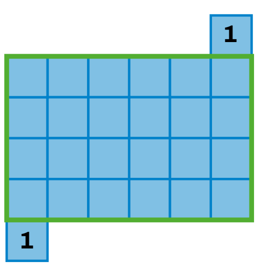
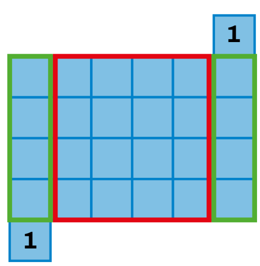
117 — Variante : « On a construit un collier de cent perles selon ce modèle. Combien a-t-on enfilé de perles bleues ? »

Pourquoi ce problème ?

Dans ce pattern figuratif, la reconnaissance des régularités et son explicitation est d'un niveau d'expertise plus élevé, car la relation n'est pas linéaire. La généralisation et le recours à la lettre ne seront attendus qu'en milieu de cycle 4.

Ce problème donne lieu à un travail sur le calcul littéral afin de justifier l'équivalence des expressions proposées par les élèves.

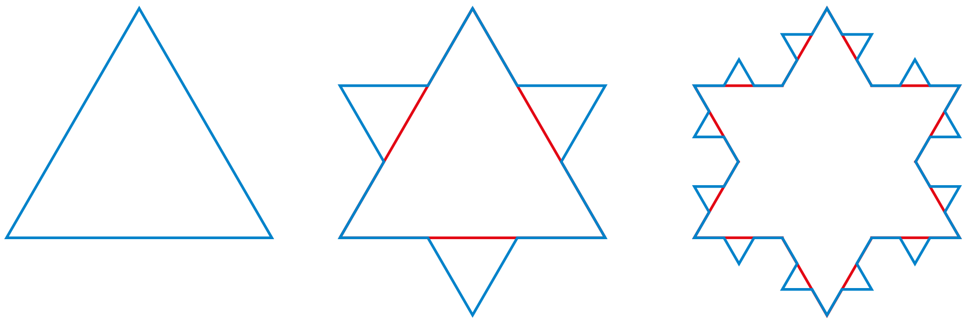
Stratégies d'enseignement

<table>
<tr><th>Stratégies</th><th colspan="2">Régularités</th><th>Commentaires</th></tr>
<tr>
<td>Dénombrer les petits carrés à chaque étape.</td>
<td colspan="2">Les nombres à ajouter, pour passer d'un rang au suivant, sont les entiers impairs plus grands que 5.
<table>
<tr><th>Rang de l'élément</th><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>…</td></tr>
<tr><th>Nombre de carrés</th><td>5</td><td>10</td><td>17</td><td>26</td><td></td></tr>
</table>
+ 5 + 7 + 9</td>
<td>Avec un tableur, par exemple, obtenir le nombre de petits carrés pour un rang donné.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Repérer une structure faisant intervenir un arrangement en grand carré ou en rectangle.</td>
<td>
$a^2 + 2(a + 1)$</td>
<td>
$(a + 2)^2 - 2(a + 1)$</td>
<td rowspan="2">Prouver l'égalité entre les différentes expressions algébriques rendra nécessaire l'utilisation de propriétés de calcul littéral pour transformer les expressions (factorisation et développement).</td>
</tr>
<tr>
<td>
$a(a + 2) + 2$</td>
<td>
$a^2 + 2a + 2$</td>
</tr>
</table>

Problème 3. Le flocon de Koch

Énoncé

Le flocon de Koch est une courbe fractale[118] dont les premières étapes sont illustrées ci-dessous à partir d'un triangle équilatéral.



Rang 0 : un triangle équilatéral.

Rang 1 : tous les segments bleus sont de la même longeur.

Rang 2 : tous les segments bleus sont de la même longeur.

a. Combien de segments bleus composent chacune de ces figures aux rangs 0, 1, 2 ?
b. Combien y a-t-il de segments bleus sur la figure de rang 3 ?
c. Déterminer, en expliquant votre méthode de calcul, le nombre de segments bleus qui composent la figure de rang 5, puis celle de rang 20.
d. Trouver une façon de calculer le nombre de segments à n'importe quel rang.
e. Expliquer une règle de construction pour passer d'une figure d'un rang quelconque au suivant.

Mots-clés

Fractale, pattern, algorithmique, algèbre.

118 — Pour aller plus loin : les patterns peuvent également intervenir dans des domaines variés comme le jeu vidéo ou les films d'animation. Un exemple, les arbres : https://mathcurve.com/fractals/arbre/arbre.shtml

Pourquoi ce problème ?

Une figure fractale[119] – figure qui présente à toutes les échelles une structure identique – peut être rapprochée d'un pattern évolutif. Un travail sur d'autres fractales, avec un questionnement analogue, peut constituer un dossier « Mathématiques et arts » pour l'oral du diplôme national du brevet.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Ce problème peut être traité dès la 4e, en lien avec la notion de puissances. En 3e, les dernières questions permettent de mettre en évidence une expression littérale. Ce problème, se modélisant par une suite géométrique, peut être utilisé dans le cadre d'une liaison collège-lycée.

Stratégies d'enseignement

Le recours à un logiciel de programmation pour visualiser les figures des premiers rangs peut être une aide à la reconnaissance des régularités et à la mise en évidence d'une structure de boucle[120].

Un temps long d'investigation sur les deux premières questions est nécessaire à une bonne compréhension de la procédure et permet d'entrer dans la résolution des questions suivantes.

Pour les rangs proches, la progression étant géométrique, le nombre de segments calculé au rang 3 est souvent correct. Au-delà, les itérations multiples peuvent créer des erreurs, comme en témoigne cette retranscription de trace écrite d'un élève de 3e.

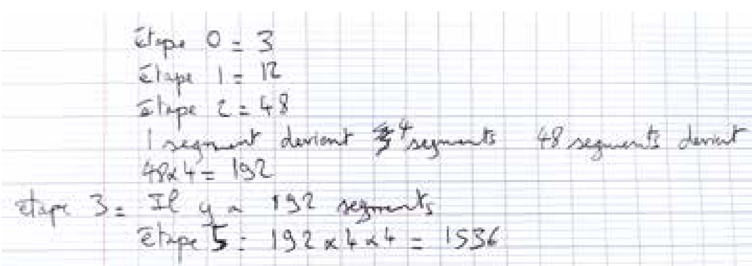


Figure 28. Trace écrite d'un élève de 3e.

Cette erreur est à rapprocher du constat que la multiplication itérée est peu travaillée, contrairement à l'addition itérée, ce qui rend les situations numériques purement multiplicatives plus difficiles.

119 — Notion travaillée dans l'option mathématiques expertes en terminale.
120 — Transfert (voir l'introduction de ce guide) : à partir d'une autre figure (segment, carré, etc.), on peut faire appliquer la même règle.

Problème 4. Des carrés et une spirale

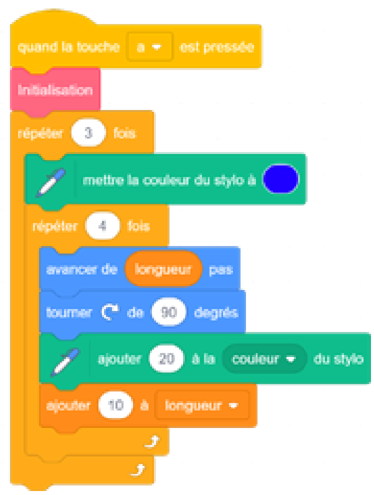
Énoncé

On considère les scripts Scratch ci-dessous[121].

1. Associer chacun des scripts A, B et C ci-dessous à l'une des représentations 1, 2, 3 et 4 (voir p. suivante).

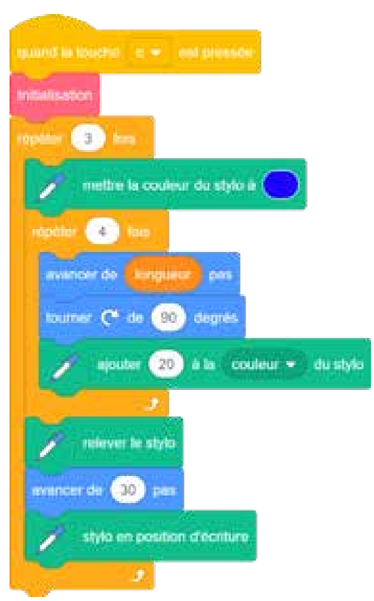
Scripts :

Bloc d'initialisation



Script A

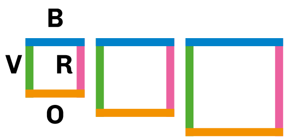
Script B



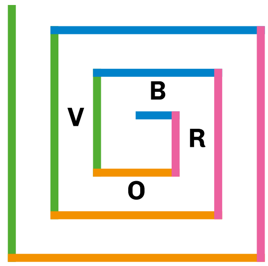
Script C

121 — Les fichiers Scratch sont disponibles en téléchargement.

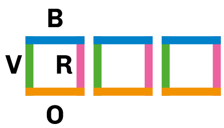
Représentations :



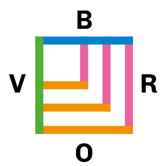
Représentation 1



Représentation 2



Représentation 3



Représentation 4

2. Dans cette question, on s'intéresse au pattern dont le début correspond à la représentation 3, et plus particulièrement à la couleur des segments, dont l'enchaînement est bleu, rose, orange, vert.

a. Quelle est la couleur du 10e segment ?

b. Quelle est la couleur du 20e segment ? Que faut-il modifier dans le script pour s'en assurer ?

c. Quelle est la couleur du 125e segment ? Que faut-il modifier dans le script pour s'en assurer ?

d. Trouver une méthode pour déterminer la couleur de n'importe quel segment de ce pattern.

3. On s'intéresse, dans cette question, plus particulièrement au script A et à la longueur des segments en pixels (px).

a. Quelle est la longueur du 10e segment ?

b. Quelle est la longueur du 20e segment ? Que faut-il modifier dans le script pour s'en assurer ?

c. Quelle est la longueur du 125e segment ? Que faut-il modifier dans le script pour s'en assurer ?

d. Trouver un moyen de calculer le nombre d'éléments constitutifs du pattern à n'importe quel rang.

Mots-clés

Pattern, programmation par blocs.

Pourquoi ce problème ?

Ce problème d'algorithmique amène à découvrir la structure et le motif d'un pattern répétitif (question 2) puis d'un pattern évolutif (question 3).

Les patterns conduisent à utiliser des blocs d'instruction identiques. Leurs représentations facilitent la compréhension de l'effet de l'ordre dans lequel ces instructions s'enchaînent.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Ce problème peut être proposé dès la classe de 5e pour travailler l'algorithmique et la programmation (variables, boucles imbriquées, blocs utilisateurs) ainsi que la construction d'expressions littérales, en fin du cycle 4.

Stratégies d'enseignement

Les élèves travaillent la première question en tant qu'activité débranchée. Après un débat en classe, une validation des différentes réponses peut alors se faire via la construction et l'exécution des scripts sur un logiciel de programmation par blocs. La bonne compréhension des scripts est nécessaire pour accéder correctement aux questions suivantes.

Pour les rangs proches, les élèves peuvent aussi recourir à une stratégie d'essais/ajustements à l'aide d'un logiciel pour se rendre compte de la difficulté du « comptage ». Dans ce cas, une solution à transmettre aux élèves est l'utilisation d'un compteur.

Pour les rangs lointains, l'expérimentation par le logiciel atteint une limite : la figure sort de la fenêtre graphique, ce qui pousse à anticiper et généraliser.

Dans le cas où on étudie le pattern répétitif, l'anticipation sur la couleur d'un segment met en œuvre la division quotition et donne du sens au reste de la division euclidienne. Chaque segment prend alternativement une des quatre couleurs : bleu (reste 1) ; rose (reste 2) ; orange (reste 3) ; vert (reste 0). La couleur du 125e segment est bleu, car 125 = 4 x 31 + 1.

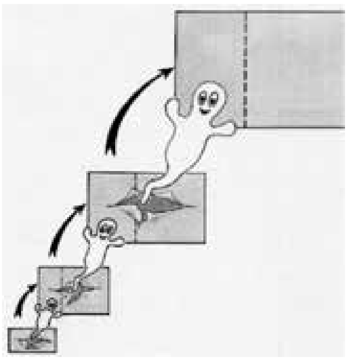
Pour aller plus loin

On peut ajouter une question au problème : « On souhaite faire parcourir au lutin au moins 5 000 px. Combien faut-il de segments au minimum et quelle est la longueur du dernier segment ? »

Cette question est l'occasion de découvrir la boucle « répéter jusqu'à ce que » avant le lycée par l'utilisation de tests, d'un tableur ou par la programmation.

Problème 5. Tel père, tel fils[122]

Énoncé



C'est l'histoire d'un petit rectangle de dimensions 2 mm x 3 mm.
Chaque jour, il s'agrandit pour devenir un rectangle plus grand : sa nouvelle largeur est égale à son ancienne longueur ; sa nouvelle longueur est égale à la somme de ses deux anciennes dimensions.
Au bout de combien de jours son aire dépasse-t-elle 1,5 m^2 ?

Mots-clés

Patterns figuratif et évolutif, relation de récurrence, problème atypique, prendre des initiatives, expérimenter, chercher, représenter, raisonner.

Pourquoi ce problème ?

D'un point de vue mathématique, ce problème permet aux élèves de rencontrer un pattern évolutif non conventionnel, de valider ou d'invalider un modèle et de donner du sens à la nécessité de convertir des unités de mesure (sous-multiples du m^2), d'introduire le modèle d'agrandissement mathématique.

Ces problèmes atypiques permettent la mise en œuvre de différentes stratégies mathématiques pour l'élève ; il peut :
— soit être persévérant dans sa recherche lorsqu'il calcule les quatorze aires ;
— soit faire preuve d'initiative en utilisant un tableur (avec ou sans la fonctionnalité test) ou en programmant ;
— soit être original s'il a la capacité de produire une idée peu fréquente. Cela a été le cas pour des élèves qui ont exprimé une relation entre les grandeurs en jeu.

122 — Problème issu de la compétition Mathématiques sans frontières, académie de Strasbourg, niveaux 3e, 2de, décembre 2011 : http://maths-msf.site.ac-strasbourg.fr/spip/spip.php?article628

Ce type de pattern utilisé par des artistes[123] peut s'intégrer dans le parcours PEAC[124] et encourager ainsi les élèves à créer leur propre pattern artistique.

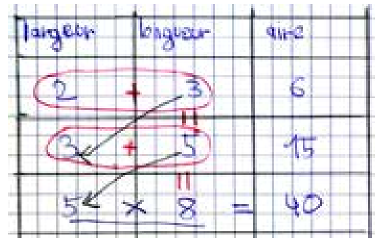


Figure 29. Traces écrites d'élèves de 4e.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Il peut être envisagé dès la fin du cycle 3, à tous les niveaux du cycle 4 ainsi qu'en classe de 2de, ce qui en fait un candidat intéressant pour les liaisons interdegrés et peut faire l'objet d'une *lesson study* et/ou de temps d'observations croisées.

Stratégies d'enseignement

Pour mettre en œuvre de la différenciation, durant les phases de recherche ou de dévolution, l'enseignant sera amené à « aider » les élèves qui ne parviennent pas à débuter leur recherche, qui ne respectent pas les consignes de l'énoncé, qui se découragent ou qui font des erreurs de conversions ou de calculs. Il pourra réguler cette recherche en favorisant les échanges, en proposant des aides qui engagent l'élève dans une réflexion (« son aire a-t-elle dépassé 1,5 m^2 le deuxième jour ? »).

L'objectif est que chaque élève puisse progresser dans ses stratégies de recherche et de représentation ainsi que dans son questionnement tout en permettant sa progression grâce à l'explicitation des stratégies, leur mise en commun et leur hiérarchisation progressive débouchant sur une trace écrite claire.

123 — Voir Norman Dilworth ou Ellsworth Kelly.
124 — Le parcours d'éducation artistique et culturelle : https://www.education.gouv.fr/le-parcours-d-education-artistique-et-culturelle-peac-4283

En résumé

- Un pattern est un motif, une règle de structure. Les problèmes de ce chapitre proposent d'étudier des patterns répétitif ou évolutif. Le travail sur les patterns permet de développer à la fois les pensées algorithmique (comment trouver un élément du pattern à partir des précédents ?) et algébrique (comment trouver l'élément de rang *n* du pattern ?). On commence ainsi à installer une représentation mentale de la récurrence, préparant le travail sur les suites au lycée. La recherche d'un élément lointain du pattern motive l'introduction du calcul littéral.

- L'étude des patterns fournit également des situations privilégiées pour développer les compétences orales (explicitation de la règle) et pour travailler le passage du langage naturel à un langage mathématique plus formel, et enfin pour illustrer des situations d'interdisciplinarité, notamment dans le domaine artistique.

- Les patterns amènent à exprimer en langage naturel de premiers algorithmes.