MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté Égalité Fraternité

ACADÉMIE DE NORMANDIE
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques

Session 2026

Exercices nationaux (2h)
Candidats et candidates de la voie générale **ne** suivant **pas** l'enseignement de spécialité mathématiques
Et **tous** les candidats et candidates de la voie technologique

9 indications avant de commencer :

1. *Pour cette partie, la recherche est individuelle.*
2. *Le sujet contient 4 pages numérotées de 1 à 4.*
3. *Les règles, compas, rapporteurs, équerre, petit matériel (ciseaux, colle) et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur. L'échange de ces instruments, hors calculatrice, peut être autorisé entre candidats sur accord explicite des surveillants, et dans le strict respect du silence.*
4. *Vous apposerez* ***dans l'emplacement prévu à cet effet, l'étiquette d'anonymat*** *donnée par l'établissement.*
5. *Afin de faciliter le travail de correction, il est demandé de rédiger sur des* ***feuilles distinctes*** *les solutions des exercices 1 et 2 (un en-tête par exercice) et de numéroter, par exercice, vos pages.*
6. *Si vous n'arrivez pas à formuler une réponse complète, il est néanmoins conseillé d'exposer le bilan des recherches que vous avez pu entreprendre.* Il est également conseillé d'accorder une heure à un premier exercice, puis de passer au deuxième exercice, quitte à revenir ensuite au premier**.**
7. *Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur votre copie en expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre puis poursuivez votre composition.*
8. *Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximales.*
9. **Les énoncés doivent être rendus** au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice 1 – pour tous les candidates et candidats

Plus fort !

Dans cet exercice, toutes les questions et sous-questions sont, dans une large mesure, indépendantes. Certaines montent crescendo en difficulté. Toutes les réponses devront être argumentées.

1. *Les feux de l'amour.* Si Alice n'aime pas Jordan alors Brenda n'aime pas Dan. Si Brenda aime Jordan, alors Alice n'aime pas Jordan. Si Brenda n'aime pas Jordan, alors Brenda n'aime pas Dan. Brenda aime-t-elle Dan ?

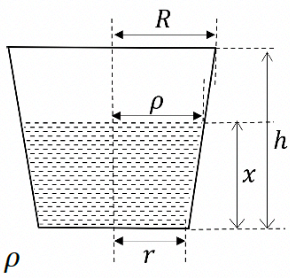
2. *Retour vers le futur.* Votre oncle a 54 ans. En échangeant les chiffres des unités et des dizaines, il n'a plus que 45 ans. Cet artifice lui fait gagner 9 ans. Plus généralement, envisageons une personne ayant ab années, avec éventuellement $a = 0$ (dans l'exemple ci-dessus, $a = 5$ et $b = 4$).

a. Combien d'années, au maximum, cette facétieuse personne pourrait-elle gagner grâce à ce procédé ?

b. Cette personne pourrait-elle ainsi gagner exactement 30 ans ?

3. *Intelligence Administrative.* 4 personnes se présentent à l'élection d'un conseil. Tous les votes sont valides et exprimés. Voici les résultats obtenus : Johanna obtient $\frac{1}{4}$ des voix, Jason obtient $\frac{4}{15}$ des voix, Jasmine obtient $\frac{3}{20}$ des voix, et Julie obtient $\frac{1}{3}$ des voix. Qui l'emporte et combien pouvait-il y avoir de votants ?

4. *Une moitié de seau pas si bête.* Un seau a la forme d'un tronc de cône de petit rayon r, de grand rayon $R > r$ et de hauteur totale h.



a. Justifier que son volume total vaut

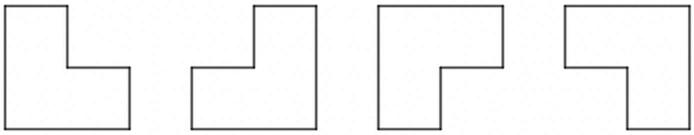
$$\mathcal{V} = \frac{\pi h}{3}(r^2 + Rr + R^2)\,.$$

b. On remplit le seau jusqu'à la hauteur x, nombre réel appartenant à l'intervalle $[0, h]$. La surface de l'eau à cette hauteur x est un disque de rayon ρ. Déterminer ρ en fonction de r, R et h.

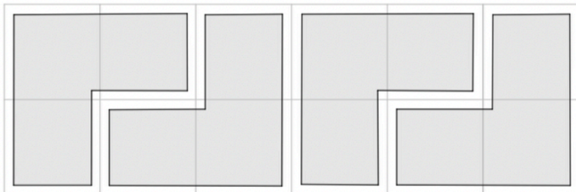
c. On suppose que $r = 1$, $R = 1{,}2$ et $h = 2$. À l'aide de votre calculatrice, donner une valeur approchée de x de sorte que le seau soit rempli à la moitié de sa capacité.

Pourquoi pouvait-on limiter la recherche autour et au-dessus de la valeur $x = 1$?

5. *Triominos.* Les polygones suivants, formés de trois carrés, sont appelés *triominos* :



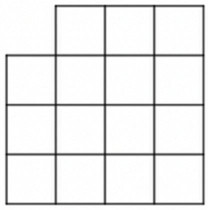
On s'intéresse au pavage par des triominos de grilles (ou, en ***b.*** *et* ***c.*** de morceaux de grilles) de format $a \times b$, où a désigne leur nombre de lignes et b leur nombre de colonnes. La figure ci-contre montre un exemple de pavage d'une grille dans le cas où $a = 2$ et $b = 6$.



Soit n un entier naturel non nul.

a. Est-il possible de paver une grille de format $2^n \times 2^n$?

b. On retire le carré en haut à gauche d'une telle grille (exemple ci-contre avec $n = 2$). Démontrer qu'il est alors possible de paver cette grille ainsi modifiée (on commencera par les cas $n = 1$ et $n = 2$ avant de généraliser).



c. Démontrer que le résultat précédent reste vrai quand on enlève n'importe laquelle des cases de la grille complète $2^n \times 2^n$ initiale.

6. *Sommes harmoniques.* Pour n entier naturel, $n \geq 1$, on calcule la somme (dite « harmonique »)

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Ainsi, $H_1 = 1$, $H_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.

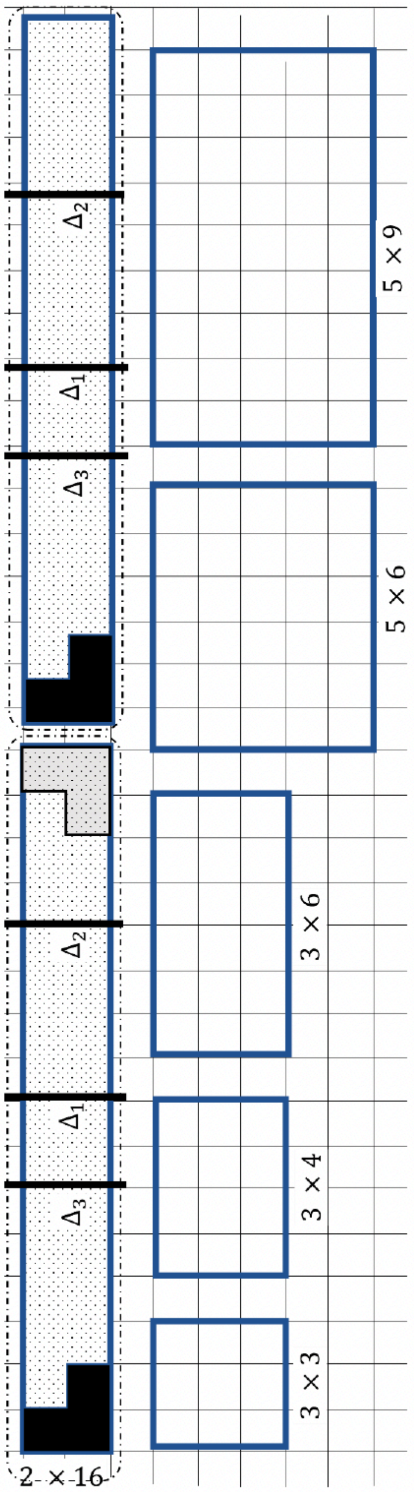
a. Justifier que $H_4 = \frac{25}{12}$.

b. Proposer un code en langage Python permettant d'obtenir H_n pour tout entier naturel n avec $n \geq 1$.

c. On appelle « terme binaire » de H_n l'inverse de la plus grande puissance de deux figurant parmi ses termes à sommer. Ainsi, le terme binaire de H_2 est $\frac{1}{2}$, celui de H_3 aussi ; le terme binaire de H_8 est $\frac{1}{8}$, celui de H_9, de H_{10}..., H_{15} aussi, etc. Quel est le terme binaire de H_3 ? De H_5 ? De H_{20} ?

d. On remarque, après quelques essais, que les valeurs de H_n ne semblent jamais être entières dès que $n \geq 2$. Démontrer-le à l'aide, notamment, du terme binaire de H_n.

Exercice 2 – pour les candidates et candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité



Triominos (bis)

On revient ici sur les pavages par des triominos (cf. **5.** de l'exercice 1) de grilles (ici, complètes) $a \times b$ rectangulaires, puis carrées, sur lesquels on se pose des questions complémentaires.

Il est recommandé de dessiner sur sa copie les grilles au stylo, mais les triominos au crayon de papier. On pourra s'aider, comme brouillon, des grilles déjà tracées figurant en regard.

1. Représenter un pavage d'une grille dans le cas où $a = 3$ et $b = 4$.

2. *a.* On suppose que l'on peut paver une grille de taille $a \times b$ (on la dit alors « pavable »). Montrer que l'entier ab est divisible par 3.

b. Trouver la plus petite grille carrée pavable de taille $a \times a$.

c. La condition « ab est divisible par 3 » est-elle suffisante pour garantir qu'une grille de taille $a \times b$ soit pavable ?

3. On suppose que $a = 2$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur b une grille de taille $2 \times b$ est-elle pavable ?

4. *Travaux manuels.* Sur l'un des bandeaux 2×16 ci-contre, on a symétrisé le triomino encré en noir par rapport à l'axe Δ_1, cela a donné le triomino teinté en clair à l'autre bout. On symétrise ce nouveau triomino par rapport à l'axe Δ_2, puis le nouveau-nouveau triomino par rapport à Δ_3.

a. Dessiner sur votre copie à l'échelle 1/2 le bandeau et les 4 triominos (dont celui d'origine) en présence.

b. Découper un bandeau (à l'échelle 1) de l'énoncé, remplacer chaque symétrie par un pliage en faisant en sorte que le triomino noir soit toujours visible. Enfin découper selon ses traits. On obtient une farandole de 8 triominos identiques. Pourquoi ? *Le deuxième bandeau en fournit aussi 8.*

5. On suppose dans cette question que $a = 5$. On s'aidera au besoin des 16 petits triominos qu'on disposera sur les grilles ad-hoc pour ses tests au brouillon.

a. Représenter un pavage convenable d'une grille quand $b = 6$.

b. Représenter un pavage convenable d'une grille quand $b = 9$.

c. On suppose b divisible par 3, $b \geq 6$. Montrer que l'on peut paver une grille de taille $5 \times b$.

6. On suppose que b est divisible par 3 et que l'on peut paver une grille de taille $a \times b$. Montrer que l'on peut alors paver une grille de taille $(a + 2) \times b$.

7. On suppose que $a \geq 4$, et $b \geq 4$. Montrer que l'on peut paver une grille de taille $a \times b$ si, et seulement si, ab est divisible par 3. En déduire les grilles carrées que l'on peut paver.