

Olympiades nationales de mathématiques

Session 2026

Exercices académiques (2h)

Candidats et candidates de la voie générale **ne** suivant **pas** l'enseignement de spécialité mathématiques
Et **tous** les candidats et candidates de la voie technologique

9 indications avant de commencer :

1. Pour cette partie, la recherche se fait en équipe (au moins deux élèves, idéalement trois, au maximum quatre).
2. Le sujet contient 4 pages numérotées de 1 à 4.
3. Les règles, compas, rapporteurs, équerre, petit matériel (ciseaux, colle) et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.
4. Vous apposerez **dans l'emplacement prévu à cet effet, l'étiquette d'anonymat** et porterez sur votre copie **le nom du groupe** ainsi que **les numéros d'inscription des membres du groupe** qui vous seront donnés par l'établissement.
5. Afin de faciliter le travail de correction, il est demandé de rédiger sur des **feuilles distinctes** les solutions des exercices 3 et 4 (un en-tête par exercice) et de numéroté, par exercice, vos pages.
6. Si vous n'arrivez pas à formuler une réponse complète, il est néanmoins conseillé d'exposer le bilan des recherches que vous avez pu entreprendre. Il est également conseillé d'accorder une heure à un premier exercice, puis de passer au deuxième exercice, quitte à revenir ensuite au premier.
7. Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur votre copie en expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre puis poursuivez votre composition.
8. Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximales.
9. **Les énoncés doivent être rendus** au moment de quitter définitivement la salle de composition.

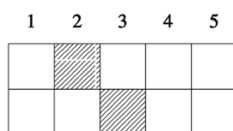
Exercice 3 – pour tous les candidates et candidats

Cartes légales

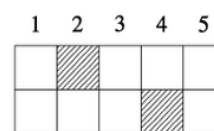
On souhaite construire un jeu de cartes où chaque carte de ce jeu est constituée d'une grille rectangulaire vérifiant les trois conditions suivantes :

- 5 colonnes numérotées de 1 à 5 de la gauche vers la droite ;
- un certain nombre r de lignes, **fixé pour tout le jeu de cartes** (r entier naturel non nul) ;
- **exactement une case hachurée par ligne.**

Voici par exemple deux cartes d'un jeu à 2 lignes :



Carte A



Carte B

Une carte est dite **légale** quand le nombre de cases hachurées dans les colonnes de numéro pair est un nombre pair. Sinon, la carte est dite **illégal**.

Par exemple, pour un jeu à 2 lignes, la carte A ci-dessus à gauche est illégale car le nombre de cases grisées dans les colonnes de numéro pair (colonnes 2 et 4), étant égal à 1, est donc impair. La carte B à droite est légale.

Pour un jeu à r lignes, on note respectivement N_r le nombre de cartes (légales ou illégales) et n_r le nombre de cartes légales que l'on peut produire.

1. Pour la carte A ci-dessus à gauche, en ne changeant pas la deuxième ligne, montrer qu'il y avait trois choix possibles des cases à hachurer de la première ligne pour la rendre légale.
2. Produire une carte légale d'un jeu de cartes à 4 lignes.
3. Produire une carte illégale d'un jeu de cartes à 6 lignes.
4. Calculer N_1 puis vérifier que $N_2 = 25$.
5. Exprimer N_r en fonction de r .
6. Calculer n_1 puis vérifier que $n_2 = 13$.
7. Compléter les pointillés de la proposition suivante afin qu'elle soit vraie.

« Pour produire une carte légale d'un jeu à $(r + 1)$ lignes, on peut procéder ainsi :

- Produire une carte G d'un jeu de cartes à r lignes (légale ou illégale).
- Quand la carte G est illégale lui adjoindre une nouvelle ligne dont on hachure une case de numéro, ou sinon, quand la carte G est légale, une case de numéro

8. Par cette méthode, montrer que pour tout entier non nul r , $n_{r+1} = n_r + 2N_r$, puis en déduire n_3 .
9. Un mathématicien a proposé la formule suivante pour calculer le nombre n_r de cartes légales d'un jeu à r lignes : pour tout entier r non nul, $n_r = 3 + \frac{5}{2}(5^{r-1} - 1)$.

Vérifier que cette formule est bien cohérente avec les résultats de la question 6 (détailler les calculs).

Pour la suite de l'exercice, on admet que cette formule est vraie pour tout entier non nul r .

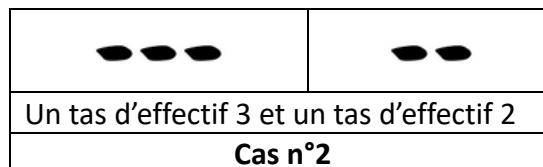
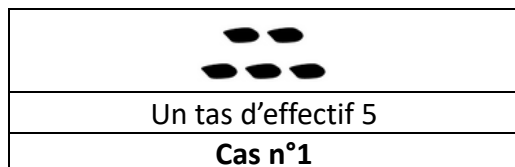
10. Déterminer l'entier r pour lequel le nombre n_r de cartes légales est le plus proche de 100.
11. On applique les mêmes règles de construction de cartes, mais avec un autre nombre c entier non nul de colonnes (donc autre que 5).
 - a. Déterminer un entier c permettant d'avoir facilement 100 cartes légales. Préciser alors le nombre de lignes nécessaires.
 - b. Dans un jeu à 2 lignes, déterminer une valeur de c permettant d'avoir un nombre C de cartes légales tel que $|C - 100| \leq 5$.

Exercice 4 – pour les candidates et candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité**Le jeu du génie et les nombres n -géniaux**

Un génie donne à Aladdin des cailloux qu'il doit diviser en plusieurs tas. Le génie multipliera les effectifs de chaque tas entre eux : le résultat obtenu correspondra au nombre de pièces d'or qu'Aladdin recevra.

Le défi est de trouver la répartition qui maximise ce produit.

Par exemple, si Aladdin reçoit cinq cailloux, parmi toutes les possibilités, il peut décider de répartir les cailloux selon les deux cas ci-dessous.



Dans le cas n°1, il recevra 5 pièces d'or et dans le cas n°2, il recevra 6 pièces d'or car le génie effectuera le produit de 3 par 2.

La répartition des cailloux en tas pourra être précisée à l'aide de dessins comme ci-dessus ou à l'aide de listes de nombres de cailloux par tas : (5) ; (3 ; 2) ; (2 ; 1 ; 1 ; 1) ; etc...

Partie A : Premiers essais avec sept cailloux

Dans cette partie, Aladdin reçoit sept cailloux.

1. Lister les 15 façons possibles de répartir sept cailloux en tas (sans tenir compte de l'ordre).
2. Calculer le nombre de pièces d'or obtenues pour chaque répartition.
3. Quel est le nombre maximum de pièces d'or que l'on peut obtenir avec sept cailloux ?

Partie B : Obtenir exactement 100 pièces avec seize cailloux

Dans cette partie, Aladdin reçoit seize cailloux.

1. Factoriser 100 en un produit de facteurs premiers.
2. Proposer deux répartitions des seize cailloux qui donnent exactement 100 pièces d'or.

Partie C : Nombres n -géniaux

Dans cette partie, Aladdin reçoit n cailloux.

Si Aladdin peut obtenir exactement k pièces d'or à partir de ces n cailloux, on dira que le nombre k est n -génial.

Le résultat de la **partie B** indique par exemple que le nombre 100 est 16-génial, car avec 16 cailloux, il est possible d'obtenir 100 pièces d'or.

1. a. Le nombre 15 est-il 7-génial ?
b. Lister tous les nombres 7-géniaux.
2. a. Vérifier que le nombre 9 est 8-génial et que le nombre 10 est 9-génial.
b. Pourquoi le nombre 11 n'est-il pas 10-génial ?
3. Déterminer un entier $n \geq 30$ tel que le nombre $n + 1$ ne soit pas n -génial.
4. a. Le nombre 8 est 7-génial.
Vérifier que le nombre 8 est aussi 8-génial, 9-génial et 10-génial.
b. Montrer que le nombre 8 est m -génial pour tout entier $m > 7$.
5. Plus généralement, montrer que si le nombre k est n -génial, alors il est également m -génial pour tout entier $m > n$.

Partie D : Stratégie optimale pour maximiser les pièces d'or

On définit $M(n)$ comme le nombre maximum de pièces d'or que l'on peut obtenir en répartissant au mieux les n cailloux. On dira qu'une telle répartition est optimale.

On indique dans le tableau ci-dessous les valeurs de $M(n)$ pour presque tous les entiers n de 1 à 15.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| $M(n)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | | 18 | 27 | 36 | 54 | 81 | 108 | 162 | 243 |

1. Indiquer la répartition des six cailloux permettant d'obtenir 9 pièces d'or.
2. Quelle stratégie doit-on adopter pour obtenir le nombre maximum de pièces d'or avec neuf, douze ou quinze cailloux ?
3. Montrer qu'une répartition contenant un tas de cinq cailloux ou plus n'est jamais optimale.
4. Montrer qu'une répartition n'est pas optimale dans les trois cas suivants :
 - Elle contient deux tas de quatre cailloux ;
 - Elle contient trois tas de deux cailloux ;
 - Elle contient un tas de quatre cailloux et un tas de deux cailloux.
5. Aladdin reçoit finalement 50 cailloux. Peut-il obtenir plus de 10 millions de pièces ?