

Olympiades nationales de mathématiques

Session 2026

Exercices nationaux (2h)

Candidats et candidates de la voie générale suivant l'enseignement de spécialité mathématiques

9 indications avant de commencer :

1. Pour cette partie, la recherche est individuelle.
2. Le sujet contient 5 pages numérotées de 1 à 5.
3. Les règles, compas, rapporteurs, équerre, petit matériel (ciseaux, colle) et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur. L'échange de ces instruments, hors calculatrice, peut être autorisé entre candidats sur accord explicite des surveillants, et dans le strict respect du silence.
4. Vous apposerez **dans l'emplacement prévu à cet effet, l'étiquette d'anonymat** donnée par l'établissement.
5. Afin de faciliter le travail de correction, il est demandé de rédiger sur des **feuilles distinctes** les solutions des exercices 1 et 2 (un en-tête par exercice) et de numéroté, par exercice, vos pages.
6. Si vous n'arrivez pas à formuler une réponse complète, il est néanmoins conseillé d'exposer le bilan des recherches que vous avez pu entreprendre. Il est également conseillé d'accorder une heure à un premier exercice, puis de passer au deuxième exercice, quitte à revenir ensuite au premier.
7. Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur votre copie en expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre puis poursuivez votre composition.
8. Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximales.
9. **Les énoncés doivent être rendus** au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice 1 – pour tous les candidates et candidats

Plus fort !

Dans cet exercice, toutes les questions et sous-questions sont, dans une large mesure, indépendantes. Certaines montent crescendo en difficulté. Toutes les réponses devront être argumentées.

1. Les feux de l'amour. Si Alice n'aime pas Jordan alors Brenda n'aime pas Dan. Si Brenda aime Jordan, alors Alice n'aime pas Jordan. Si Brenda n'aime pas Jordan, alors Brenda n'aime pas Dan. Brenda aime-t-elle Dan ?

2. Retour vers le futur. Votre oncle a 54 ans. En échangeant les chiffres des unités et des dizaines, il n'a plus que 45 ans. Cet artifice lui fait gagner 9 ans. Plus généralement, envisageons une personne ayant ab années, avec éventuellement $a = 0$ (dans l'exemple ci-dessus, $a = 5$ et $b = 4$).|

a. Combien d'années, au maximum, cette facétieuse personne pourrait-elle gagner grâce à ce procédé ?

b. Cette personne pourrait-elle ainsi gagner exactement 30 ans ?

3. Intelligence Administrative. 4 personnes se présentent à l'élection d'un conseil. Tous les votes sont valides et exprimés. Voici les résultats obtenus : Johanna obtient $\frac{1}{4}$ des voix, Jason obtient $\frac{4}{15}$ des voix, Jasmine obtient $\frac{3}{20}$ des voix, et Julie obtient $\frac{1}{3}$ des voix. Qui l'emporte et combien pouvait-il y avoir de votants ?

4. Une moitié de seau pas si bête. Un seau a la forme d'un tronc de cône de petit rayon r , de grand rayon $R > r$ et de hauteur totale h .

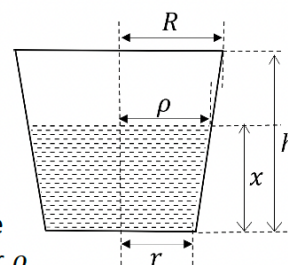
a. Justifier que son volume total vaut

$$V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + Rr + R^2).$$

b. On remplit le seau jusqu'à la hauteur x , nombre réel appartenant à l'intervalle $[0, h]$. La surface de l'eau à cette hauteur x est un disque de rayon ρ . Déterminer ρ en fonction de r , R et h .

c. On suppose que $r = 1$, $R = 1,2$ et $h = 2$. À l'aide de votre calculatrice, donner une valeur approchée de x de sorte que le seau soit rempli à la moitié de sa capacité.

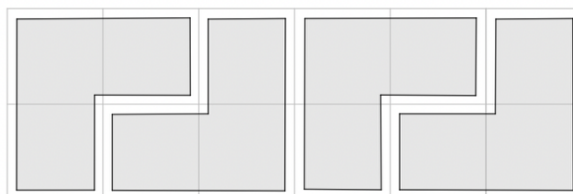
Pourquoi pouvait-on limiter la recherche autour et au-dessus de la valeur $x = 1$?



5. *Triominos*. Les polygones suivants, formés de trois carrés, sont appelés *triominos* :



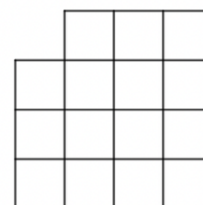
On s'intéresse au pavage par des triominos de grilles (ou, en **b.** et **c.** de morceaux de grilles) de format $a \times b$, où a désigne leur nombre de lignes et b leur nombre de colonnes. La figure ci-contre montre un exemple de pavage d'une grille dans le cas où $a = 2$ et $b = 6$.



Soit n un entier naturel non nul.

a. Est-il possible de paver une grille de format $2^n \times 2^n$?

b. On retire le carré en haut à gauche d'une telle grille (exemple ci-contre avec $n = 2$). Démontrer qu'il est alors possible de paver cette grille ainsi modifiée (on commencera par les cas $n = 1$ et $n = 2$ avant de généraliser).



c. Démontrer que le résultat précédent reste vrai quand on enlève n'importe laquelle des cases de la grille complète $2^n \times 2^n$ initiale.

6. *Sommes harmoniques*. Pour n entier naturel, $n \geq 1$, on calcule la somme (dite « harmonique »)

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Ainsi, $H_1 = 1$, $H_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.

a. Justifier que $H_4 = \frac{25}{12}$.

b. Proposer un code en langage Python permettant d'obtenir H_n pour tout entier naturel n avec $n \geq 1$.

c. On appelle « terme binaire » de H_n l'inverse de la plus grande puissance de deux figurant parmi ses termes à sommer. Ainsi, le terme binaire de H_2 est $\frac{1}{2}$, celui de H_3 aussi ; le terme binaire de H_8 est $\frac{1}{8}$, celui de H_9 , de H_{10} ..., H_{15} aussi, etc. Quel est le terme binaire de H_3 ? De H_5 ? De H_{20} ?

d. On remarque, après quelques essais, que les valeurs de H_n ne semblent jamais être entières dès que $n \geq 2$. Démontrer-le à l'aide, notamment, du terme binaire de H_n .

Exercice 2 – pour les candidates et candidats suivant l'enseignement de spécialité*Super premiers*

On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel non nul qui possède exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même. Ainsi, on rappelle que ni 0 ni 1 ne sont premiers.

On rappelle aussi qu'il existe une infinité de nombres premiers, que l'on peut ensuite ordonner : le plus petit des nombres premiers est 2, on le note p_1 ; le suivant est 3, on le note p_2 et ainsi de suite. On notera ainsi p_n le n -ième nombre premier. On donne, à titre d'illustration, la liste ordonnée (de p_1 à p_{15}) des quinze premiers nombres premiers :

$$p_1 = 2; p_2 = 3; p_3 = 5; p_4 = 7; p_5 = 11; p_6 = 13; p_7 = 17; p_8 = 19; p_9 = 23; p_{10} = 29, \\ p_{11} = 31; p_{12} = 37; p_{13} = 41; p_{14} = 43; p_{15} = 47.$$

Pour tout entier naturel n , on note $\pi(n)$ ou plus simplement π_n le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n . On signale que cette notation, $\pi(n)$ ou π_n , est usuelle dans ce contexte, mais n'a rien à voir avec le nombre π de la géométrie du cercle.

Étude de la suite $(\pi_n)_{n \geq 0}$

- Justifier que $\pi_0 = 0$ et $\pi_5 = 3$. Combien valent $\pi_1, \pi_2, \pi_6, \pi_{29}, \pi_{47}$ et π_{46} ?
- Démontrer que la suite $(\pi_n)_{n \geq 0}$ est croissante, c'est-à-dire que, pour tout naturel n , $\pi_n \leq \pi_{n+1}$.
- Démontrer que si p et q sont deux nombres premiers tels que $p < q$, alors $\pi_p < \pi_q$.
- Démontrer que pour tout entier naturel n , $\pi_n \leq n$. Pour quel(s) entier(s) n a-t-on $\pi_n = n$?

Suite des itérés de m par π

Pour m entier naturel, on appelle suite des itérés de m par π la suite de nombres formée par m ; le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à m ; le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux au nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à m ; etc. Ainsi, la suite des itérés de m par π est-elle $(m; \pi(m); \pi(\pi(m)); \pi(\pi(\pi(m))))$, ...)

- Calculer les 7 premiers termes de la suite des itérés de m dans les cas particuliers où $m = 5$ puis où $m = 11$.
- Démontrer que, de manière générale, la suite des itérées d'un entier naturel m est toujours décroissante, et devient nulle à partir d'un certain rang.

Entiers super premiers

Un entier naturel m tel que $m \geq 2$ est dit *super premier* si, dans la suite des itérés de m par π , tous les termes différents de 0 et de 1 sont des nombres premiers. En particulier, un super premier est premier.

- Parmi les nombres 2, 3, 5, 7 et 11, lesquels sont super premiers ?
- Soit n un entier naturel non nul. Supposons avoir construit les n plus petits entiers super premiers $s_1 < \dots < s_n$. Montrer que le super premier suivant est le nombre premier p tel que $\pi(p) = s_n$.
- Donner le cinquième plus petit nombre super premier.

Comportement asymptotique de la suite des super premiers.

Bien sûr, la suite ordonnée (s_n) des nombres super premiers tend vers $+\infty$, mais on souhaite montrer qu'elle tend très vite vers l'infini, au sens où le quotient $\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)$ tend lui-même vers $+\infty$. Plus explicitement, nous fixons un entier naturel non nul M , et nous allons montrer qu'il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait :

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} \geq M.$$

Pour ce faire, nous admettons le résultat suivant, qu'il est donc inutile de démontrer :

Pour tout entier naturel non nul N , on a $Q_N \leq 4^N$, où Q_N est le produit des nombres premiers compris (au sens large) entre 1 et N .

10. Montrer que pour tout entier $N \geq 4^{2(M+1)}$, on a : $4^{(M+1)(\pi(N)-\pi(\sqrt{N}))} \leq 4^N$. On pourra considérer le produit des nombres premiers compris entre \sqrt{N} (non compris) et N .

11. En déduire, dès lors, que : $\pi(N) \leq \frac{N}{M+1} + \sqrt{N}$.

12. Montrer enfin que pour N suffisamment grand, $\frac{N}{\pi(N)} \geq M$.

13. Conclure.