

Olympiades nationales de mathématiques

Session 2026

Exercices académiques (2h)

Candidats et candidates de la voie générale suivant l'enseignement de spécialité mathématiques

9 indications avant de commencer :

1. Pour cette partie, la recherche se fait en équipe (au moins deux élèves, idéalement trois, au maximum quatre).
2. Le sujet contient 3 pages numérotées de 1 à 3.
3. Les règles, compas, rapporteurs, équerre, petit matériel (ciseaux, colle) et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.
4. Vous apposerez **dans l'emplacement prévu à cet effet, l'étiquette d'anonymat** et porterez sur votre copie **le nom du groupe** ainsi que **les numéros d'inscription des membres du groupe** qui vous seront donnés par l'établissement.
5. Afin de faciliter le travail de correction, il est demandé de rédiger sur des **feuilles distinctes** les solutions des exercices 3 et 4 (un en-tête par exercice) et de numéroté, par exercice, vos pages.
6. Si vous n'arrivez pas à formuler une réponse complète, il est néanmoins conseillé d'exposer le bilan des recherches que vous avez pu entreprendre. Il est également conseillé d'accorder une heure à un premier exercice, puis de passer au deuxième exercice, quitte à revenir ensuite au premier.
7. Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur votre copie en expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre puis poursuivez votre composition.
8. Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximales.
9. **Les énoncés doivent être rendus** au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice 3 – pour tous les candidates et candidats

Cartes légales

On souhaite construire un jeu de cartes où chaque carte de ce jeu est constituée d'une grille rectangulaire vérifiant les trois conditions suivantes :

- 5 colonnes numérotées de 1 à 5 de la gauche vers la droite ;
- un certain nombre r de lignes, **fixé pour tout le jeu de cartes** (r entier naturel non nul) ;
- **exactement une case hachurée par ligne.**

Voici par exemple deux cartes d'un jeu à 2 lignes :

1	2	3	4	5

Carte A

1	2	3	4	5

Carte B

Une carte est dite **légale** quand le nombre de cases hachurées dans les colonnes de numéro pair est un nombre pair. Sinon, la carte est dite **illégal**.

Par exemple, pour un jeu à 2 lignes, la carte A ci-dessus à gauche est illégale car le nombre de cases grisées dans les colonnes de numéro pair (colonnes 2 et 4), étant égal à 1, est donc impair. La carte B à droite est légale.

Pour un jeu à r lignes, on note respectivement N_r le nombre de cartes (légales ou illégales) et n_r le nombre de cartes légales que l'on peut produire.

1. Pour la carte A ci-dessus à gauche, en ne changeant pas la deuxième ligne, montrer qu'il y avait trois choix possibles des cases à hachurer de la première ligne pour la rendre légale.
2. Produire une carte légale d'un jeu de cartes à 4 lignes.
3. Produire une carte illégale d'un jeu de cartes à 6 lignes.
4. Calculer N_1 puis vérifier que $N_2 = 25$.
5. Exprimer N_r en fonction de r .
6. Calculer n_1 puis vérifier que $n_2 = 13$.
7. Compléter les pointillés de la proposition suivante afin qu'elle soit vraie.

« Pour produire une carte légale d'un jeu à $(r + 1)$ lignes, on peut procéder ainsi :

- Produire une carte G d'un jeu de cartes à r lignes (légale ou illégale).
- Quand la carte G est illégale lui adjoindre une nouvelle ligne dont on hachure une case de numéro, ou sinon, quand la carte G est légale, une case de numéro

8. Par cette méthode, montrer que pour tout entier non nul r , $n_{r+1} = n_r + 2N_r$, puis en déduire n_3 .
9. Un mathématicien a proposé la formule suivante pour calculer le nombre n_r de cartes légales d'un jeu à r lignes : pour tout entier r non nul, $n_r = 3 + \frac{5}{2}(5^{r-1} - 1)$.

Vérifier que cette formule est bien cohérente avec les résultats de la question 6 (détailler les calculs).

Pour la suite de l'exercice, on admet que cette formule est vraie pour tout entier non nul r .

10. Déterminer l'entier r pour lequel le nombre n_r de cartes légales est le plus proche de 100.
11. On applique les mêmes règles de construction de cartes, mais avec un autre nombre c entier non nul de colonnes (donc autre que 5).
 - a. Déterminer un entier c permettant d'avoir facilement 100 cartes légales. Préciser alors le nombre de lignes nécessaires.
 - b. Dans un jeu à 2 lignes, déterminer une valeur de c permettant d'avoir un nombre C de cartes légales tel que $|C - 100| \leq 5$.

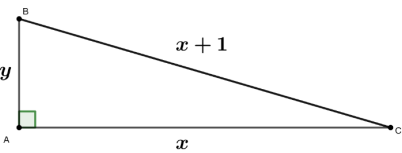
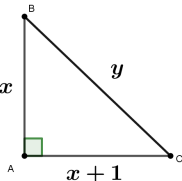
Exercice 4 – pour les candidates et candidats suivant l'enseignement de spécialité

Triangles rectangles presque isocèles

Les parties A, B, C et D sont totalement indépendantes.

Dans cet exercice, on étudie des triangles rectangles presque isocèles (TRPI), c'est-à-dire, des triangles rectangles dont les longueurs des côtés sont des nombres entiers et dont deux des côtés ont des longueurs consécutives.

On distinguera deux types de TRPI : ceux dont l'hypoténuse fait partie des côtés consécutifs (type 1) et ceux dont les côtés de l'angle droit sont les côtés consécutifs (type 2).

TRPI de type 1	TRPI de type 2
	
x et y entiers tels que $y < x < x + 1$	x et y entiers tels que $x < x + 1 < y$

Partie A : Quelques TRPI particuliers

- Vérifier que le triangle dont les côtés ont pour longueurs respectives 5, 12, 13 est un TRPI de type 1.
- Vérifier que le triangle dont les côtés ont pour longueurs respectives 20, 21, 29 est un TRPI de type 2.
- Donner un triangle rectangle presque isocèle à la fois de type 1 et de type 2.

Partie B : Étude des TRPI de type 1

On considère un triangle ABC rectangle en A, TRPI de type 1, dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont x et y , des nombres entiers tels que $y < x < x + 1$.

- Démontrer que $y^2 = 2x + 1$ et en déduire que y est nécessairement un nombre impair.
- Démontrer que le périmètre P du triangle est un nombre pair.
- En utilisant le fait qu'il existe un entier k tel que $y = 2k + 1$, démontrer que x est un multiple de 4.
- En déduire que l'aire A du triangle est un nombre pair.
- Pour un triangle TRPI de type 1, déterminer les valeurs de x correspondantes respectivement à $y = 3$, puis $y = 5$ puis $y = 7$.
- Vérifier que pour chacun des cas de la question 5, le nombre y est la racine carrée de la somme des deux autres valeurs x et $x + 1$. Démontrer cette propriété pour tout triangle TRPI de type 1.

Partie C : Étude des TRPI de type 2

On considère un triangle ABC rectangle en A, TRPI de type 2, dont la longueur de l'un des côtés de l'angle droit est x et celle de l'hypoténuse est y , avec x et y des nombres entiers tels que $x < x + 1 < y$.

- En utilisant le théorème de Pythagore, démontrer que $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$.
- À l'aide de la calculatrice, trouver les deux TRPI de type 2 dont la longueur x du côté de l'angle droit est comprise entre 100 et 1000. Expliquer la démarche utilisée.

Partie D : Triangles rectangles particuliers

- Montrer qu'on peut construire des triangles rectangles dont les trois côtés sont des nombres entiers et les deux côtés de l'angle droit sont des entiers pairs consécutifs (*).
- Peut-on construire des triangles rectangles dont les trois côtés sont des nombres entiers et les deux côtés de l'angle droit sont des entiers impairs consécutifs ? (*)
- À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer qu'il n'est pas possible de construire un triangle rectangle isocèle dont les trois côtés sont des nombres entiers.

(*) : Par exemple, 2, 4 et 6 sont des entiers pairs consécutifs tandis que 9 et 11 des entiers impairs consécutifs.